

文章编号:1671-1637(2016)06-0125-07

基于离散时间的定价与舱位控制联合决策

高金敏¹,乐美龙²,曲林迟¹

(1. 上海海事大学 经济管理学院,上海 201306; 2. 南京航空航天大学 民航学院,江苏 南京 211106)

摘要:为使航空公司收益最大化,将旅客订票与退票看作2个独立的随机过程,利用泊松分布模拟整个预售期内旅客订票过程,运用负指数分布模拟旅客退票过程,从运用价格控制需求的角度出发建立了基于离散时间的航空机票定价与舱位控制联合决策模型,采用动态规划的求解思想和方法对模型进行了求解,确定在合适的时间段以何种价格销售机票,设置每个时间段机票销售的数量限制,通过一个算例对模型进行了验证。分析结果表明:2~9折与全价机票应分别提前60.00、56.58、52.87、48.83、44.38、39.44、33.88、27.51、20.09 d开始销售,订票限制应分别为3、43、79、111、141、171、199、227、290。联合决策模型具有有效性和实用性,可作为航空公司进行合理定价和舱位控制的参考。

关键词:航空运输;收益管理;动态定价;舱位控制;离散时间;联合决策

中图分类号:U8 **文献标志码:**A

Joint decision making of pricing and seat inventory control based on discrete time

GAO Jin-min¹, LE Mei-long², QU Lin-chi¹

(1. School of Economics and Management, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China;
2. School of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, Jiangsu, China)

Abstract: In order to maximize the revenue of airline company, passenger booking and refunding tickets were regarded as two independent random processes. Poisson distribution was used to simulate the process of passenger booking tickets in the whole pre-sale period. Negative exponential distribution was used to simulate the process of passenger refunding tickets. The joint decision making model of air ticket pricing and seat inventory control based on discrete time was built from the perspective of using price to control demand. The solving idea and method of dynamic programming were used to solve the model. The air ticket being sold with which price in appropriate time period was determined. The number limit of ticket sales in each time period was set. The model was verified by an example. Analysis result shows that 80% discount, 70% discount, 60% discount, 50% discount, 40% discount, 30% discount, 20% discount, 10% discount and full price air tickets should be sold 60.00, 56.58, 52.87, 48.83, 44.38, 39.44, 33.88, 27.51 and 20.09 d in advance respectively. Booking limits should be 3, 43, 79, 111, 141, 171, 199, 227 and 290 respectively. The joint decision making model has validity and practicability. It can be used as the reference for the airline company to set price and control seat inventory reasonably. 2 tabs, 1 fig, 35 refs.

收稿日期:2016-07-01

基金项目:江苏省自然科学基金项目(BK20151479);上海海事大学研究生创新基金资助项目(2016ycx061)

作者简介:高金敏(1990-),女,山东临沂人,上海海事大学工学博士研究生,从事交通运输系统优化研究。

导师简介:曲林迟(1964-),男,浙江舟山人,上海海事大学教授,工学博士。

Key words: air transportation; revenue management; dynamic pricing; seat inventory control; discrete time; joint decision making

Author resumes: GAO Jin-min(1990-), female, doctoral student, +86-21-38282000, jinmingao@foxmail.com; QU Lin-chi(1964-), male, professor, PhD, +86-21-38282000, qulinchi@163.com.

0 引 言

在航空客运市场上,旅客到达具有一定的随机性,所以对于航空公司来说,所面临的旅客需求是不确定的。这主要是因为旅客飞行目的不同,导致对航班时间、价格以及服务等的要求不同。一般来说,商务旅客对时间比较敏感,休闲旅客对价格比较敏感。通常根据对时间和价格的敏感度将市场划分为4部分:对时间敏感而对价格不敏感,对时间、价格都敏感,对时间、价格都不敏感,对时间不敏感而对价格敏感。在这样的市场环境下,航空公司必须通过一定的管理手段区别细分市场。针对每个细分市场的特点进行歧视定价,并设置相应的订票限制,通过价格和舱位数量分配的联合控制来实现收益的最大化。目前,收益管理已成为航空公司提高收益的重要管理技术,其包含的动态定价与舱位控制两部分内容一直是研究的热点,也是航空公司关注的核心。

在动态定价方面的相关模型有离散时间模型^[1-2]和连续时间模型^[3-4]。Feng等就需求函数为一般函数的情形提出了两级票价结构的收入管理模型^[5],并得出了最优定价策略;Gallego等提出了易逝性产品定价综合模型,并在需求函数为指数函数的条件下得出了最优解^[6],还研究了可以用于网络收益管理的多品种动态定价模型^[7];Bertsimas等研究了多资源多、产品的离散时间动态定价模型^[8];Lin等研究了竞争环境下的离散时间动态定价模型^[9];施飞等通过航空公司与旅客之间的动态博弈,给出了航空公司关于时间的定价模型,并在该定价模型的基础上,确定了不同折扣机票的退票手续费以及航空公司销售各种折扣机票的时间区间^[10];周蕾等从航空公司与旅客2个局中人博弈的角度,阐述了考虑未按约定出现(No-show)情况的兼顾多航段航空机票定价模型^[11]。

航班舱位控制研究涉及的方法一般分为静态方法和动态方法,研究的角度包括单航段、多航段以及网络层面。Littlewood提出了Littlewood准则^[12];Belobaba在Littlewood准则基础上创立了期望边

际座位收入模型^[13];Lee等利用离散时间随机过程得出了单航段分配问题的最优准则^[14];Glover等基于确定型网络最小成本流模型,提出了航段控制的起讫点控制问题的数学规划表达式^[15];Williamson建议在其他条件保持不变的情况下,将出发地、目的地、费用组合增加一个座位产生的额外收益作为设定出发地、目的地、费用组合嵌套的指标^[16];Wang等针对航空运营过程中动态网络收益管理这一普遍问题,提出了一种阈值策略^[17];高强等建立了多航段舱位控制的随机规划模型^[18];李金林等以民航客运航线网络为背景,从策略、模型和方法3个方面系统地研究了网络舱位控制的基本问题^[19];樊玮等建立了基于分布估计算法的多航段舱位控制模型^[20];高金敏等研究了轮辐式航线网络结构下的舱位控制问题^[21]。

定价与舱位控制作为收益管理的核心,两者之间有密切的联系,将两者结合起来进行综合研究有重要意义,但是目前相关的成果却不多^[22-31]。Weatherford提出了一个同时进行定价和座位分配的模型^[32],由于所用函数比较复杂,并没有获得有规律性的结论;李晓花等探讨了航空公司客运收入管理研究中动态价格与舱位控制的统一分析模型^[33];李豪等将顾客分为两类,应用动态规划方法建立了相应的座位控制和动态定价综合模型^[34];高金敏等基于超模博弈理论探讨了折扣机票定价与舱位控制的联合决策问题^[35]。基于此,本文从运用价格控制需求的角度出发,建立了定价与舱位控制的联合决策模型,并通过算例对模型进行了验证,以解决离散时间下航空机票定价与舱位控制的联合决策问题。

1 问题描述

由于航空运输自身的特点,使得航空公司在短期之内调整运力的可能性不大,那么在有限的资源限制下,只能通过灵活地运用价格对市场需求进行调整,来寻求更高的收益。

对于航空公司来讲,产品便是飞机上的座位。在同一个航班上的座位,其硬件条件与旅客所能享受的服务没有太大的区别,但是相应的票价却有几

十种,甚至上百种。这是因为在航空运输市场上,每位旅客的支付意愿不同,如果航空公司实行歧视定价,将会给公司带来更高的收益。当航空公司把票价制定得足够低,使得航空运输需求远远大于自身能够提供的运力时,就必须有选择地接受旅客的订票请求。而收益管理的实质就是在合适的时间将合适的机票以合适的价格卖给合适的人,以便实现利用有限的座位资源获取最大收益的目标。

由于航空公司产品消费具有同时性特点,因此,需要提前一段时间对机票进行预售。定义 T 为机票预售期(图 1), K 为整个预售期所划分的时间段总数; t_i 为第 i 个时间段开始订票的时刻。在实际售票过程中,旅客总需求是不确定的,旅客订票具有随机性,因此,在不考虑团体订票的情况下,可用泊松过程来模拟旅客订票。同时,对于已经持有机票的旅客来说,退票也是随机的。在飞机起飞之前,旅客退票的概率与已持票时间无关,即具有无记忆性特征,这种离散无记忆随机行为可用负指数分布来表达,因此,本文采用泊松分布来模拟旅客订票过程,用负指数分布来模拟旅客退票过程,需要解决的问题是确定在每个时间段以何种票价销售限制数量的机票。

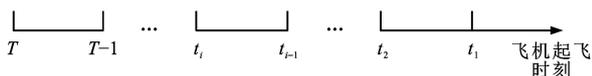


图 1 机票预售期

Fig. 1 Pre-sale period of air ticket

2 模型描述和分析

模型基于以下假设。

(1)旅客需求独立,且不存在需求转移,低票价旅客先于高票价旅客订票。

(2)在每一个时间段内,旅客的订票请求相互独立,且服从不同强度的泊松过程。

(3)整个预售期内,旅客退票相互独立,退票行为一个一个地发生并服从负指数分布。

模型中所涉及到的符号及参数定义如下。

令 p_i 为航空公司在第 i 个时间段内制定的航班票价,并且 $p_i > p_{i+1}$; D_i 为第 i 个时间段内旅客的订票需求; $q_i(t)$ 为第 i 个时间段内经过时长 t 后,旅客选择退票的概率; r_i 为第 i 个时间段内持票旅客选择退票时,航空公司收取的手续费率; G_i 为第 i 个时间段内的订票旅客中在飞机起飞时发生 No-show 情况的人数。

根据博弈论理论,将动态定价过程视为航空公

司与旅客之间的博弈过程,令 Z 为航空公司收益, V 为旅客收益,只要 $V \geq 0$,旅客就会选择购票。对于航空公司来说,博弈中的理想结局应为 $\max Z$,该模型也是航空公司进行机票定价的理想模型。

2.1 旅客收益分析

根据模型假设,在整个预售期内,旅客退票过程服从负指数分布,定义概率密度函数为

$$f(t) = ue^{-ut} \tag{1}$$

式中: $f(t)$ 为经过时长 t 后的概率密度; u 为旅客退票时间间隔的均值, $u \geq 0$ 。

由于指数分布具有无记忆性,那么旅客的退票概率与已持票时间无关,根据前面的问题描述,航空公司的定价过程是离散的,各个时间段之间是紧密相连的,因此,第 i 个时间段内持票旅客经过时长 t 后选择退票的概率为

$$q_i(t) = 1 - e^{-ut} \tag{2}$$

相对应的旅客期望收益为

$$V_i = q_i(t)(-\varphi - r_i p_i) + [1 - q_i(t)] \cdot (p_0 - p_i + \theta) \tag{3}$$

式中: V_i 为第 i 个时间段内的旅客期望收益; p_0 为航班机票的全票价格; φ 为旅客选择退票时所花费的广义成本,包括时间、交通费用等; θ 为旅客登机完成旅程所获得的效用。

2.2 航空公司收益分析

根据模型假设,任一时间段内旅客订票相互独立,且服从泊松过程,定义第 i 个时间段内旅客到达人数的概率分布为

$$P(D_i) = \frac{\lambda_i^{D_i}}{D_i!} e^{-\lambda_i} \tag{4}$$

式中: $P(D_i)$ 为第 i 个时间段内旅客的订票需求为 D_i 的概率; λ_i 为第 i 个时间段内旅客到达的强度。

此外,在飞机准备起飞时,由于每位旅客是否按时登机是相互独立的,所以第 i 个时间段内航班的持票旅客在飞机起飞时发生 No-show 的总人数 G_i 服从二项分布,即

$$Q(G_i) = c_{D_i}^{G_i} h^{G_i} (1 - h)^{D_i - G_i} \tag{5}$$

式中: $Q(G_i)$ 为第 i 个时间段内航班的持票旅客在飞机起飞时发生 No-show 的总人数为 G_i 的概率; $c_{D_i}^{G_i}$ 为从 D_i 个不同元素中取出 G_i 个元素的组合数; h 为旅客发生 No-show 的概率。

由此可得航空公司第 i 个时间段内的实际收益为

$$Z_i = D_i p_i - G_i b \tag{6}$$

式中: Z_i 为航空公司第 i 个时间段内的实际收益; b

为航空公司支付给 No-show 旅客的退款。

整个预售期内的收益为

$$Z = \sum_{i=1}^K Z_i = \sum_{i=1}^K (D_i p_i - G_i b) - HF \quad (7)$$

式中: H 为被拒绝登机(Denied Boarding, DB)的旅客总人数; F 为赔偿给每位 DB 旅客的费用。

3 模型建立

3.1 定价模型

定义旅客的需求密度 $\lambda(p)$ 与票价 p 的关系为

$$\lambda(p) = \alpha e^{-\beta p} \quad (8)$$

式中: $\lambda(p)$ 为票价为 p 时的需求密度, 是关于 p 的非递增函数; α, β 为大于 0 的常数。

那么第 i 个时间段内航班旅客的需求密度 λ_i 与票价 p_i 的关系为

$$\lambda_i(p_i) = \alpha e^{-\beta p_i} \quad (9)$$

由于旅客订票与退票为随机过程, 那么航空公司的目标可以转化为最大化总期望收益, 因此, 定价模型变为

$$\max Z = \sum_{i=1}^K |t_i - t_{i-1}| \alpha e^{-\beta p_i} (p_i - hb) - HF \quad (10)$$

$$\text{s. t. } q_i(t) (-\varphi - r_i p_i) + [1 - q_i(t)] \cdot (p_0 - p_i + \theta) \geq 0 \quad (11)$$

$$0 \leq t_i \leq T \quad (12)$$

由约束条件式(11)可以得到

$$p_i \leq \frac{p_0 - (\varphi + p_0 + \theta) q_i(t)}{1 - (1 - r_i) q_i(t)} \quad (13)$$

联立式(2), 得到

$$t_i \leq \frac{1}{u} \ln \left(\frac{p_0 - p_i + \varphi + \theta + r_i p_i}{\varphi + r_i p_i} \right) \quad (14)$$

结合目标函数可求得即航空公司对航班开始以价格 p_i 售票的最早时间 t_i^* , 也可以理解为在离飞机起飞还有 t_{i-1} 到 t_i 的时间段内航空公司对航班以价格 p_i 售票。

3.2 舱位控制模型

由于航空公司机票预售期总共划分为 K 个时间段, 那么航班在整个预售期内对应着 K 种票价等级。定义 N_i 为第 i 个时间段内航班已经接受的订票数; s_i 为飞机起飞时第 i 个时间段内航班所接受的订票旅客实际登机的人数; R_i 为第 i 个时间段内航空公司售出一张机票所得到的期望收益; C 为航班容量。那么在已知具体哪个时间段以何种票价销售机票的情况下, 航空公司的下一目标就是限定各个时间段的机票销售数量。舱位控制模型为

$$\max Z = \sum_{i=1}^K R_i N_i - HF \quad (15)$$

$$\text{s. t. } R_i = p_i - hb \quad (16)$$

$$H = \sum_{i=1}^K s_i - C \quad (17)$$

3.3 定价与舱位控制联合决策模型

通过以上定价模型和舱位控制模型的建立和分析, 进一步建立航空公司基于离散时间的定价与舱位控制联合决策的动态规划模型, 具体为: 时间段 $i=1, 2, \dots, K$; 状态变量 S_i 为第 i 个时间段初始时刻拥有的可以分配给第 i 个时间段到第 K 个时间段的座位数; 决策变量 L_i 为第 i 个时间段内航班分配的座位数; 状态转移方程为 $S_{i+1} = S_i - L_i$; 允许决策集合 $d_i = \{L_i | 0 \leq L_i \leq D_i\}$, L_i 为整数; 最优指标函数 f_i 为第 i 个时间段初始状态为 S_i 时, 从第 i 个时间段到第 K 个时间段内航班的最大期望收益。

根据以上定义, 得到舱位控制的基本动态规划模型为

$$\begin{cases} f_i = \max_{0 \leq L_i \leq D_i} (R_i L_i + f_{i+1} - HF) \\ f_{K+1} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

当 $i=K$ 时, 有

$$f_K = \max_{0 \leq L_K \leq D_K} (R_K L_K - HF) \quad (19)$$

$$\frac{\partial f_K}{\partial L_K} = R_K - jkF \prod_{i=1}^{K-1} I_i \quad (20)$$

式中: j 为旅客被拒绝登机的概率; k 为旅客按时登机的概率; I_i 为 $D_i \geq S_i - S_{i+1}$ 的概率。

当 f_K 取得最大值时, 有

$$\frac{\partial f_K}{\partial L_K} = 0 \quad (21)$$

由此可得

$$I_{K-1} = \frac{R_K}{jkF \prod_{i=1}^{K-2} I_i} \quad (22)$$

当 $i=K-1$ 时, 有

$$f_{K-1} = \max_{0 \leq L_{K-1} \leq D_{K-1}} (R_{K-1} L_{K-1} + f_K - HF) \quad (23)$$

$$\frac{\partial f_{K-1}}{\partial L_{K-1}} = R_{K-1} - jkF \prod_{i=1}^{K-2} I_i \quad (24)$$

当 f_{K-1} 取得最大值时, 有

$$\frac{\partial f_{K-1}}{\partial L_{K-1}} = 0 \quad (25)$$

由此可得

$$I_{K-2} = \frac{R_{K-1}}{jkF \prod_{i=1}^{K-3} I_i} \quad (26)$$

$$I_1 = \frac{R_2}{jkF} \tag{27}$$

$$j = \frac{R_1}{kF} \tag{28}$$

根据以上归纳分析,当时间段 $i = 2, 3, \dots, K$ 时,可以得到通式为

$$\frac{\partial f_i}{\partial L_i} = R_i - R_{i-1} I_{i-1} \tag{29}$$

当 f_i 取得最大值时,满足

$$I_{i-1} = \frac{R_i}{R_{i-1}} \tag{30}$$

$$D_{i-1} = |t_{i-1} - t_{i-2}| \lambda_{i-1} \tag{31}$$

根据定价模型,当 $i = 2, 3, \dots, K$ 时,满足

$$\lambda_{i-1} \geq \frac{R_i - kF}{R_{i-1} - kF} \lambda_i \tag{32}$$

$$t_i = \frac{1}{u} \ln \left(\frac{p_0 - p_i + \varphi + \theta + r_i p_i}{\varphi + r_i p_i} \right) \tag{33}$$

这一时刻开始以价格 p_i 销售机票对航空公司是最有益的,因此,式(32)、(33)便为航空公司进行定价与舱位控制联合决策的依据。

4 算例分析

假设航空公司的某航班机票全价为 1 000 元,航空公司的折扣票价共设 8 种,分别为 9 折、8 折、7 折、6 折、5 折、4 折、3 折、2 折,航空公司提前 60 d 开始售票。旅客按时登机完成旅程所获得的效用为 200,如果旅客在飞机起飞之前选择退票,那么航空公司收取的退票手续费恒为 200 元,因退票所产生的广义成本为 150 元。此外,每位旅客在飞机起飞时的 No-show 概率为 0.1,每位 DB 旅客的成本为其对应折扣票价的 1.5 倍,并且只有最低折扣的旅客才有可能成为 DB 旅客。飞机容量为 200 人,参数 $\alpha = 10, \beta = 0.001$,模型输入数据见表 1。

表 1 模型输入数据

Tab. 1 Input data of model

折扣	票价/元	手续费率/ %	航空公司售出一张 机票的期望收益/元	需求密度
无折扣	1 000	20.00	920	3.678 8
9 折	900	22.22	830	4.065 7
8 折	800	25.00	740	4.490 0
7 折	700	28.57	650	4.965 8
6 折	600	33.33	560	5.488 2
5 折	500	40.00	470	6.065 0
4 折	400	50.00	380	6.703 3
3 折	300	66.67	290	7.407 9
2 折	200	100.00	200	8.187 3

将输入数据代入模型得到每种折扣票价对应的销售时间段以及订票限制,模型输出结果见表 2。

表 2 模型输出结果

Tab. 2 Output results of model

折扣	起始时间/d	终止时间/d	旅客需求	座位保护数	订票限制
无折扣	20.09	0.00	74	63	290
9 折	27.51	20.09	30	28	227
8 折	33.88	27.51	29	28	199
7 折	39.44	33.88	28	30	171
6 折	44.38	39.44	27	30	141
5 折	48.83	44.38	27	32	111
4 折	52.87	48.83	27	36	79
3 折	56.58	52.87	27	40	43
2 折	60.00	56.58	28		3

从表 2 可以看出,2 折机票提前 60.00 d 开始销售,3 折机票提前 56.58 d 开始销售,4 折机票提前 52.87 d 开始销售,5 折机票提前 48.83 d 开始销售,6 折机票提前 44.38 d 开始销售,7 折机票提前 39.44 d 开始销售,8 折机票提前 33.88 d 开始销售,9 折机票提前 27.51 d 开始销售,全价机票提前 20.09 d 开始销售,时间的小数部分可以转化为具体的小时数。

全价机票订票限制可以根据对历史数据的分析以及机票销售控制员的经验得到,2 折机票没有座位保护数,这是由于模型所涉及的舱位控制为嵌套控制,任何高于 2 折的机票在其自身座位数量满足不了需求时都可以占用 2 折机票的座位,这样才能避免收益的流失。

5 结 语

(1) 本文将旅客订票过程用泊松分布模拟,将旅客退票过程用负指数分布模拟,从运用价格控制旅客需求的角度出发,建立了基于离散时间的定价与舱位控制联合决策的动态规划模型。模型考虑了旅客 No-show 和 DB 因素,以最大化航空公司收益为目标,确立了在何种时间段以何种票价销售多少数量的机票对航空公司来说是最有益的。

(2) 本文研究的最终结果是得到每种折扣机票适当的销售时间段以及订票限制,并且订票限制是一个嵌套的结果,这与实际是相符的。但是文中假设旅客需求不存在转移,没有考虑旅客升级购买等情况,将来可结合旅客选择行为等因素继

续研究。

参 考 文 献 :

References :

- [1] SUBRAMANIAN J, STIDHAM S, LAUTENBACHER C J. Airline yield management with overbooking, cancellations, and no-shows[J]. *Transportation Science*, 1999, 33(2): 147-167.
- [2] CHEN Shao-xiang, GALLEGO G, LI M Z F, et al. Optimal seat allocation for two-flight problems with a flexible demand segment [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 201(3): 897-908.
- [3] LIANG Yi-gao. Solution to the continuous time dynamics yield management model[J]. *Transportation Science*, 1999, 33(1): 117-123.
- [4] FENG You-yi, XIAO Bai-chun. Optimal policies of yield management with multiple predetermined prices[J]. *Operations Research*, 2000, 48(2): 332-343.
- [5] FENG You-yi, GALLEGO G. Optimal starting times for end-of-season sales and optimal stopping times for promotional fares[J]. *Management Science*, 1995, 41(8): 1371-1391.
- [6] GALLEGO G, VAN RYZIN G. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons[J]. *Management Science*, 1994, 40(8): 999-1020.
- [7] GALLEGO G, VAN RYZIN G. A multi-product dynamic pricing problem and its applications to network yield management[J]. *Operations Research*, 1997, 45(1): 24-41.
- [8] BERTSIMAS D, DE BOER S. Dynamic pricing and inventory control for multiple products[J]. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 2005, 3(4): 303-319.
- [9] LIN K Y, SIBDARI S Y. Dynamic price competition with discrete customer choices[J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 197(3): 969-980.
- [10] 施 飞,陈森发. 随时间变化的机票折扣定价研究[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2010, 10(1): 112-116.
SHI Fei, CHEN Sen-fa. Air ticket discount pricing based on time varying[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2010, 10(1): 112-116. (in Chinese)
- [11] 周 蕾,刘长有. 考虑 No-Show 的多航段航空机票定价模型[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2014, 14(4): 201-208.
ZHOU Qiang, LIU Chang-you. Air ticket pricing model of multi-leg airline considering No-Show[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2014, 14(4): 201-208. (in Chinese)
- [12] LITTLEWOOD K. Forecasting and control of passenger bookings[C]//AGIFORS. 12th AGIFORS Symposium. Atlanta: AGIFORS, 1972: 95-117.
- [13] BELOBABA P P. Airline yield management an overview of seat inventory control[J]. *Transportation Science*, 1987, 21(2): 63-73.
- [14] LEE T C, HERSH M. A model for dynamic airline seat inventory control with multiple seat bookings[J]. *Transportation Science*, 1993, 27(3): 252-265.
- [15] GLOVER F, GLOVER R, LORENZO J, et al. The passenger-mix problem in the scheduled airlines[J]. *Interfaces*, 1982, 12(3): 73-80.
- [16] WILLIAMSON E L. Airline network seat inventory control: methodologies and revenue impacts[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1992.
- [17] WANG Xiu-bin, WANG Feng-huan. Dynamic network yield management[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2007, 41(4): 410-425.
- [18] 高 强,朱金福,陈可嘉. 航空收益管理中多航段舱位控制模型[J]. *交通运输工程学报*, 2005, 5(4): 82-85.
GAO Qiang, ZHU Jin-fu, CHEN Ke-jia. Multi-leg seat inventory control model for airline revenue management[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2005, 5(4): 82-85. (in Chinese)
- [19] 李金林,徐丽萍. 运输网络中舱位控制模型与策略[J]. *交通运输工程学报*, 2009, 9(1): 100-108.
LI Jin-lin, XU Li-ping. Capacity control models and approaches in airline network[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2009, 9(1): 100-108. (in Chinese)
- [20] 樊 玮,苏秋波. 基于分布估计算法的多航段座位分配模型[J]. *信息与控制*, 2012, 41(6): 774-778, 785.
FAN Wei, SU Qiu-bo. Multi-leg capacity allocation model based on estimation of distribution algorithm[J]. *Information and Control*, 2012, 41(6): 774-778, 785. (in Chinese)
- [21] 高金敏,乐美龙. 基于轮辐式航线网络的航班舱位控制动态优化[J]. *工业工程*, 2015, 18(5): 126-130.
GAO Jin-min, LE Mei-long. A dynamic optimization research of flight seat inventory control based on the hub and spoke route network[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2015, 18(5): 126-130. (in Chinese)
- [22] 李晓花. 航空公司客运收入管理动态定价与舱位控制的统一策略及其风险分析初探[D]. 成都: 四川大学, 2004.
LI Xiao-hua. A comprehensive strategy of dynamic pricing and inventory control in airline revenue management and the preliminary discussion of its risk analysis [D]. Chengdu: Sichuan University, 2004. (in Chinese)
- [23] 冯 莹. 东方航空 YN 分公司的动态定价及舱位控制策略研究[D]. 昆明: 云南大学, 2011.
FENG Ying. Study on dynamic pricing and inventory control strategy of China Eastern Airlines YN branch company[D]. Kunming: Yunnan University, 2011. (in Chinese)
- [24] 翟致远. 对于航空收益管理中差别定价及舱位控制策略的最优化研究[D]. 北京: 中国人民大学, 2009.
ZHAI Zhi-yuan. Optimal policies of differentiated pricing and seat inventory control in airline revenue management [D]. Beijing: Renmin University of China, 2009. (in Chinese)
- [25] 周 蕾,王忠群,龚本刚. 基于航线网络的定价、超售与舱位控制策略研究[J]. *兰州大学学报: 自然科学版*, 2016, 52(1): 126-134.

- ZHOU Qiang, WANG Zhong-qun, GONG Ben-gang. Strategy research on the pricing, overbooking and cabin inventory control of airline network[J]. Journal of Lanzhou University: Natural Sciences, 2016, 52(1): 126-134. (in Chinese)
- [26] 周 蕾,刘长有.多航段舱位控制与定价策略[J].河南科技大学学报:自然科学版,2014,35(3):32-37.
- ZHOU Qiang, LIU Chang-you. Multi-leg seat inventory control and pricing strategy[J]. Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science, 2014, 35(3): 32-37. (in Chinese)
- [27] 鲁永峰.航空货运定价机制与等级舱位控制研究[D].北京:北京交通大学,2014.
- LU Yong-feng. Research on pricing system and classified shipping space controlling of air cargo[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
- [28] 曹海娜.基于MNL模型的平行航班舱位控制与动态定价研究[D].北京:北京理工大学,2015.
- CAO Hai-na. Study on parallel space flight control and dynamic pricing based on MNL model[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015. (in Chinese)
- [29] 倪冠群,徐寅峰,徐玖平.航空收益管理价格和座位在线联合控制策略[J].管理科学学报,2014,17(7):10-21.
- NI Guan-qun, XU Yin-feng, XU Jiu-ping. Competitive analysis of revenue management: online joint pricing and booking strategies[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(7): 10-21. (in Chinese)
- [30] 张小强,庄乾秋,陈 宇,等.铁路集装箱班列动态舱位控制策略研究[J].铁道学报,2016,38(2):1-6.
- ZHANG Xiao-qiang, ZHUANG Qian-qiu, CHEN Yu, et al. Research on strategy of dynamic slot allocation for railway containers[J]. Journal of the China Railway Society, 2016, 38(2): 1-6. (in Chinese)
- [31] 周寅艳.航空公司货运动态定价与容量控制研究[D].南京:南京航空航天大学,2012.
- ZHOU Yin-yan. Research on dynamic pricing and slot inventory control of airline cargo [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012. (in Chinese)
- [32] WEATHERFORD L R. Using prices more realistically as decision variables in perishable-asset revenue management problems[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 1997, 1(3): 277-304.
- [33] 李晓花,萧柏春.航空公司收入管理价格与舱位控制的统一分析[J].管理科学学报,2004,7(6):63-69,93.
- LI Xiao-hua, XIAO Bai-chun. Comprehensive analysis of pricing and seat inventory control in airline revenue management [J]. Journal of Management Science in China, 2004, 7(6): 63-69, 93. (in Chinese)
- [34] 李 豪,熊中楷,屈卫东,等.基于乘客分类的航空客运座位控制和动态定价综合模型[J].系统工程理论与实践,2011,31(6):1062-1070.
- LI Hao, XIONG Zhong-kai, QU Wei-dong, et al. Optimal seating control and dynamic pricing for airline tickets with passenger segment [J]. Systems Engineering—Theory and Practice, 2011, 31(6): 1062-1070. (in Chinese)
- [35] 高金敏,乐美龙,曲林迟.基于超模博弈的定价与舱位控制联合决策研究[J].交通运输系统工程与信息,2015,15(6):6-12.
- GAO Jin-min, LE Mei-long, QU Lin-chi. The joint decision making research of pricing and seat inventory control based on supermodel game[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2015, 15(6): 6-12. (in Chinese)