

文章编号:1671-1637(2013)01-0015-05

基于改进 Sarma 法的岩质边坡稳定性分析

周志军¹, 牛涌¹, 张铁柱²

(1. 长安大学 特殊地区公路工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710064;
2. 云南省公路开发投资有限责任公司, 云南 昆明 650200)

摘要:以简单非均质岩质边坡的滑动为研究对象,建立了 Sarma 法力学模型。根据岩质边坡块体静力平衡条件,得出侧向正压力与临界加速度系数之间的关系,推导了临界加速度系数公式,得到边坡处于地震烈度条件下的安全稳定系数。分析了边坡的安全稳定系数与临界加速度系数之间的函数关系,并利用此函数关系将传统 Sarma 法进行了改进。计算结果表明:岩质边坡安全稳定系数与临界加速度系数之间呈单调递减的函数关系;与传统 Sarma 法相比,改进 Sarma 法无需迭代,不存在收敛性问题,算例分析中仅需 6 次计算就得到结果,并能满足要求。

关键词:路基工程;岩质边坡;安全稳定系数;临界加速度系数;Sarma 法;力学模型

中图分类号:U416.14 **文献标志码:**A

Stability analysis of rock slope based on improved Sarma method

ZHOU Zhi-jun¹, NIU Yong¹, ZHANG Tie-zhu²

(1. Key Laboratory for Special Area Highway Engineering of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, Shaanxi, China; 2. Yunnan Highway Development and Investment Co., Ltd., Kunming 650200, Yunnan, China)

Abstract: The glide of simple heterogeneous rock slope was taken as research object, a mechanical model based on Sarma method was built. According to the static equilibrium condition of rock slope block, the relationship between critical acceleration coefficient and lateral normal pressure was got. The formula of critical acceleration coefficient was deduced, and the safety stability factor of slope under the condition of seismic intensity was got. The function relationship between safety stability factor and critical acceleration coefficient was analyzed, and the traditional Sarma method was improved by using the function relationship. Calculation result shows that the function relationship between safety stability factor and critical acceleration coefficient is monotone decreasing. Compared with the traditional Sarma method, the improved Sarma method does not need iteration, and does not exist convergence problem. The calculation number of example is only 6, and the calculation result meets requirement. 1 tab, 3 figs, 12 refs.

Key words: subgrade engineering; rock slope; safety stability factor; critical acceleration coefficient; Sarma method; mechanical model

Author resume: ZHOU Zhi-jun(1975-), male, associate professor, PhD, +86-29-85355787, 5974100@qq.com.

0 引言

作为岩土工程学科的重要内容,边坡的稳定性

分析是广大专家学者以及现场工程技术人员极为关注的问题之一。边坡系统是一种常见的地貌形态,其稳定性取决于岩土的物理力学性质、破坏形式等,

收稿日期:2012-09-18

基金项目:国家自然科学基金项目(41172262)

作者简介:周志军(1975-),男,江苏泰兴人,长安大学副教授,工学博士,从事边坡稳定与防护工程研究。

其失稳变化过程及破坏形态会受到组成边坡系统物质的多样性和复杂性以及边坡结构、岩土条件和初始应力状态等诸多因素影响。国内外研究人员提出了很多岩质边坡分析的原理方法,以 Sarma 法和 Morgenstern-Price 法应用较为广泛^[1-4],但 Sarma 法公式繁琐,简单迭代法易出现震荡现象,甚至不收敛。朱大勇等根据 Sarma 法的基本假定,将斜条块侧面的推力分解为分别与摩擦力和黏聚力有关的 2 个分量,推导出更为简洁的隐含安全系数的条块推力递推方程,并采用 2 步平均迭代法,加快算法的收敛速度与精度^[5];王旭等在 Morgenstern-Price 法与 Sarma 法理论假设的基础上,通过对混合边坡的岩土分界面受力的推导和假设不平衡力矩,建立了岩质-土质混合边坡稳定性的迭代求解方法^[6];康海贵等将滑动土体分为主动区域和被动区域,视被动土体作用为增加抗滑力矩,采用积分方法推导抗滑力矩及滑动力矩的解析表达式,得到安全系数解析式^[7],但这些力学模型及公式相对复杂,使得计算过程较为不便。基于此,本文以改进 Sarma 法为基础,充分利用岩质边坡稳定性分析原理中已有的方法及临界加速度系数与安全稳定性系数之间的函数关系,为岩质边坡的安全稳定性分析提出一种满足精度要求,计算较为简便的方法。

1 Sarma 法力学模型

安全系数法是边坡稳定分析中常用的评价方法^[8],它是通过传统的均质简单土坡,采用圆弧滑动面作为分析模型,将土体划分为若干条块,利用极限平衡原理对条块进行静力分析,得到

$$F = \frac{M_r}{M_s} = Rl \frac{\tau_f}{W_a} \quad (1)$$

式中: F 为安全稳定系数; M_r 为稳定力矩; M_s 为滑动力矩; R 为滑动圆弧面的半径; l 为滑动圆弧的长度; τ_f 为土的抗剪强度; W 为滑坡体的重力; a 为滑坡体的力矩。

由于土的抗剪强度沿滑动面上的分布是不均匀的,因此,按照式(1)计算的边坡安全系数有一定误差,在实际工程中常常会遇到非圆弧滑动面的边坡稳定分析问题,Sarma 法是解决这一问题的基本方法,至今仍得到广泛的应用。

Sarma 博士对滑坡体进行斜条分的极限分析方法进行了改进,并用该方法分析了某水电站高边坡开挖过程中的稳定性。Sarma 博士认为满足安全储备结构的极限状态是通过一个假想的水平体积力 $\mu_b W$

(如水平地震惯性力)来实现的,并称 μ_b 为临界加速度系数^[9]。坝体在地震力作用下,滑动面通常为非圆弧滑动面,其力学模型见图 1,条块划分可以根据岩体土体性质和实际滑坡体结构层面进行区分,分界面可以是竖直的,也可以是倾斜的界面,Sarma 法分析模型避免了像其他方法那样需要假设一些条件。

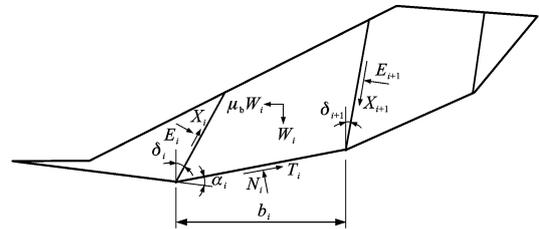


图 1 Sarma 法力学模型

Fig. 1 Mechanical model of Sarma method

模型中各个物理量的具体含义如下: E_i 、 E_{i+1} 分别为作用在第 i 条块两侧面的法向力(kN); X_i 、 X_{i+1} 分别为作用在第 i 条块两侧面的侧向切向力(kN); W_i 为第 i 条块的重力(kN); N_i 为作用在第 i 条块底滑面的法向力(kN); T_i 为作用在第 i 条块底滑面的侧向切向力(kN); U_i 为第 i 条块底滑面上的孔隙水压力(kPa); α_i 为第 i 条块底面与水平面的夹角($^\circ$); d_i 为第 i 条块界面的长度(m); b_i 为第 i 条块底面的宽度(m); δ_i 、 δ_{i+1} 分别为第 i 条块两侧面与垂直面的夹角($^\circ$); c_i 、 c'_{i+1} 分别为第 i 条块底滑面和底侧面的粘聚力(kPa); φ_i 、 φ'_{i+1} 分别为第 i 条块底滑面和底侧面的内摩擦角($^\circ$)。

2 临界加速度系数解析表达式的推导

在实际工程中,分析的对象往往是具有一定安全储备的结构,对某一处于稳定的结构,需要一个外部干扰因素,才可以使其过渡到极限状态。在塑性力学和边坡稳定性分析领域,通常的做法为:如果边坡表面作用有初始荷载 T_0 ,那么,可以通过增加这个荷载直至边坡失稳破坏,此时使结构破坏的临界荷载为 T ,因此,临界加速度系数为荷载增量和初始结构荷载的比值。

根据模型的受力情况,分析作用在第 i 条块上的作用力与作用方向(图 1)。处于下侧的滑块要阻止上面的滑块滑动,根据第 i 条块在竖直及水平方向的静力平衡条件得出

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}$$

式中: $\sum F_x$ 为水平方向上的作用力之和; $\sum F_y$ 为

竖直方向上的作用力之和。

基于此建立静力平衡方程为

$$N_i \cos(\alpha_i) + T_i \sin(\alpha_i) = W_i + X_{i+1} \cos(\delta_{i+1}) - X_i \cos(\delta_i) - E_{i+1} \sin(\delta_{i+1}) + E_i \sin(\delta_i) \quad (2)$$

$$T_i \cos(\alpha_i) + N_i \sin(\alpha_i) = \mu_b W_i + X_{i+1} \sin(\delta_{i+1}) - X_i \sin(\delta_i) + E_{i+1} \cos(\delta_{i+1}) - E_i \cos(\delta_i) \quad (3)$$

根据 Mohr-Coulomb 破坏准则,在底面和左右界面上建立极限平衡方程分别为

$$T_i = (N_i - U_i) \tan(\varphi_i) + c_i b_i \sec(\alpha_i) \quad (4)$$

$$X_i = (E_i - P_i) \tan(\varphi'_i) + c'_i d_i \quad (5)$$

$$X_{i+1} = (E_{i+1} - P_{i+1}) \tan(\varphi'_{i+1}) + c'_{i+1} d_{i+1} \quad (6)$$

式中: P_i 为第 i 条块界面上的孔隙水压力(kPa)。

将式(4)~(6)代入式(2)、(3),消去 T_i 、 X_i 、 X_{i+1} 和 N_i ,可以得到

$$E_{i+1} = \alpha_i - p_i \mu_b + E_i e_i \quad (7)$$

式(7)是递推公式,可以得到

$$E_{n+1} = \alpha_n - p_n \mu_b + E_n e_n \quad (8)$$

$$E_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} e_n - (p_n + p_{n-1} e_n) \mu_b +$$

$$E_{n-1} e_n e_{n-1}$$

进一步递推得到

$$E_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} e_n + \alpha_{n-2} e_n e_{n-1} + \dots + \alpha_1 e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2 - (p_n + p_{n-1} e_n + p_{n-2} e_n e_{n-1} + \dots + p_1 e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2) \mu_b + E_1 e_n e_{n-1} \dots e_1 \quad (9)$$

计算临界加速度系数 μ_b ,如果没有外力荷载作用下,则 $E_{n+1} = E_1 = 0$,可以得出

$$\mu_b = \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1} e_n + \alpha_{n-2} e_n e_{n-1} + \dots + \alpha_1 e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2}{p_n + p_{n-1} e_n + p_{n-2} e_n e_{n-1} + \dots + p_1 e_n e_{n-1} \dots e_3 e_2} \quad (10)$$

$$\alpha_i = [W_i \sin(\varphi_i + \alpha_i) + R_i \cos(\varphi_i) + S_{i+1} \sin(\varphi_i - \alpha_i - \delta_{i+1}) - S_i \sin(\varphi_i - \alpha_i - \delta_i)] / [\cos(\varphi_i - \alpha_i + \varphi'_i - \delta_{i+1}) \sec(\varphi'_i)] \quad (11)$$

$$p_i = \frac{W_i \cos(\varphi_i - \alpha_i)}{\cos(\varphi_i - \alpha_i + \varphi'_i - \delta_{i+1}) \sec(\varphi'_i)} \quad (12)$$

$$e_i = \frac{\cos(\varphi_i - \alpha_i + \varphi'_i - \delta_i) \sec(\varphi'_i)}{\cos(\varphi_i - \alpha_i + \varphi'_i - \delta_{i+1}) \sec(\varphi'_{i+1})} \quad (13)$$

$$R_i = c_i b_i \sec(\alpha_i) - U_i \tan(\varphi_i) \quad (14)$$

$$S_i = c_i b_i \sec(\alpha_i) - p_i \tan(\varphi_i) \quad (15)$$

$$\varphi'_1 = \delta_1 = \varphi'_{n+1} = \delta_{n+1} = 0 \quad (16)$$

3 计算安全稳定系数

定义安全稳定系数 F 为这样一个数值,如果材料的抗剪强度指标 c 值和 φ 值降低为 c_e 和 $\tan(\varphi_e)$,则边坡处于极限状态^[9],即

$$c_e = c/F \quad (17)$$

$$\tan(\varphi_e) = \tan(\varphi)/F \quad (18)$$

F 以隐函数出现在求解的方程组中,需要进行迭代计算^[10]。首先假设一系列的 F 值(如 F_i),按式(17)、(18)确定 c_e 和 $\tan(\varphi_e)$,然后计算模型在材料的抗剪强度指标处于 c_e 值和 $\arctan(\varphi_e)$ 值时与之对应的 μ_b 。在求得的一系列的 μ_b 值(如 μ_{bi})中找到其值为 0 的 F 值(图 2),经试算, μ_b 与 F 呈单调递减的函数关系^[11]。假设计算节点 F_1 的值从 1.0 开始,一直计算到 F_i ,使得 $\mu_b \leq 0$ 时停止运算。由于 μ_b 与 F 的存在函数关系,根据连续函数的介值定理,必有一点使得 μ_b 近似为 0,与其对应的 F 值即为在该地震烈度条件下的安全稳定系数。

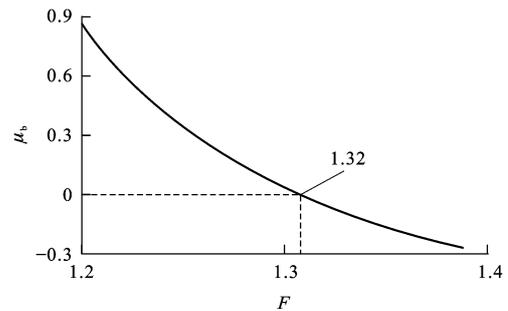


图 2 F 与 μ_b 函数关系

Fig. 2 Function relationship between F and μ_b

4 计算结果分析

4.1 工程概况

算例边坡位于国家沪陕线西安至商州高速公路(第二通道)K51+899.6 段,该边坡处于破碎岩石堆积体当中,沿线山体植被和岩石节理裂隙普遍发育。边坡的开挖方向与岩层走向近于平行,边坡坡度为 1:0.3,是一个相对高差较大的高陡边坡。边坡地表层主要为第四系残破积层,呈剪节理状结构,下面为全风化、强风化、弱风化以及微风化千枚状板岩。该边坡有一段表层为破碎岩石堆积体,断裂构造发育,岩石节理裂隙普遍发育,经初步分析该段边坡表层为最危险滑裂面,滑动面以层状界面分布,此地貌结构边坡为一段复杂的岩质边坡。此区处于地震烈度为八度条件下,边坡采用地表注浆加固和 SNS 主动柔性防护网加固方案。在分析工程地质情况后,根据岩体物理力学参数统计分析得到重度 γ 、底滑面的 c_i 和 φ_i 、侧滑面的 c'_i 和 φ'_i 等 5 个主要参数值,将此岩质边坡进行简化分块,建立计算模型(图 3)。

4.2 计算过程

将计算所需参数输入计算表中,在计算表中按式(10)~(15)设置输入公式,输入时应注意弧度和角度的换算关系,计算结果见表 1。

表 1 计算结果
Tab.1 Calculation result

F_i	i	μ_{bi}	b_i/m	c_i/kPa	φ_i/rad	c'_i/kPa	φ'_i/rad	W_i/kN	U_i/kPa	α_i/rad	e_i	S_i	R_i	δ_i/rad	P_i/kPa
1.0	1	0.038 7	3.56	34.1	28.4	48.5	0.0	967	42	46.0	6.2	151.8	175	0	42.4
	2		6.26	32.8	30.8	43.0	32.1	852	41	46.4	0.6	272.6	297	65	41.3
	3		4.26	38.5	32.7	46.8	18.7	591	39	42.1	0.8	195.3	221	49	39.6
	4		6.25	36.8	36.6	38.6	23.0	539	44	48.4	0.9	310.2	346	42	48.3
	5		5.27	37.3	38.5	36.3	25.9	863	50	49.5	0.8	265.5	302	50	46.3
	6		4.37	31.2	41.6	39.7	0.0	429	41	39.4	1.0	137.7	176	0	43.7
1.1	1	0.032 0	3.56	31.0	26.1	44.1	0.0	967	42	46.0	8.9	138.0	159	0	42.4
	2		6.26	29.8	28.4	39.1	29.7	852	41	46.4	0.6	247.8	270	65	41.3
	3		4.26	35.0	30.2	42.6	17.1	591	39	42.1	0.8	177.5	201	49	39.6
	4		6.25	33.4	34.0	35.1	21.1	539	44	48.4	1.0	282.0	315	42	48.3
	5		5.27	33.9	35.9	33.0	23.8	863	50	49.5	0.7	241.3	275	50	46.3
	6		4.37	28.4	38.9	36.1	0.0	429	41	39.4	1.0	125.2	160	0	43.7
1.2	1	0.024 4	3.56	28.4	24.2	40.4	0.0	967	42	46.0	14.0	126.5	146	0	42.4
	2		6.26	27.3	26.4	35.8	27.6	852	41	46.4	0.6	227.2	248	65	41.3
	3		4.26	32.1	28.1	39.0	15.7	591	39	42.1	0.8	162.8	184	49	39.6
	4		6.25	30.6	31.8	32.2	19.4	539	44	48.4	1.0	258.5	288	42	48.3
	5		5.27	31.1	33.5	30.2	22.0	863	50	49.5	0.7	221.2	252	50	46.3
	6		4.37	26.0	36.5	33.1	0.0	429	41	39.4	1.0	114.7	147	0	43.7
1.3	1	0.015 1	3.56	26.2	22.6	37.3	0.0	967	42	46.0	28.0	116.7	134	0	42.4
	2		6.26	25.2	24.6	33.0	25.8	852	41	46.4	0.6	209.7	229	65	41.3
	3		4.26	29.6	26.3	36.0	14.6	591	39	42.1	0.8	150.2	170	49	39.6
	4		6.25	28.3	29.8	29.7	18.0	539	44	48.4	1.0	238.6	266	42	48.3
	5		5.27	28.7	31.5	27.9	20.5	863	50	49.5	0.6	204.2	232	50	46.3
	6		4.37	24.0	34.3	30.5	0.0	429	41	39.4	1.0	105.9	136	0	43.7
1.4	1	0.002 5	3.56	24.3	21.1	34.6	0.0	967	42	46.0	226.0	108.4	125	0	42.4
	2		6.26	23.4	23.0	30.7	24.2	852	41	46.4	0.6	194.7	212	65	41.3
	3		4.26	27.5	24.6	33.4	13.6	591	39	42.1	0.8	139.5	158	49	39.6
	4		6.25	26.3	28.0	27.6	16.8	539	44	48.4	1.1	221.6	247	42	48.3
	5		5.27	26.6	29.6	25.9	19.1	863	50	49.5	0.6	189.6	216	50	46.3
	6		4.37	22.3	32.4	28.3	0.0	429	41	39.4	1.0	98.3	126	0	43.7
1.5	1	-0.018 0	3.56	22.7	19.8	32.3	0.0	967	42	46.0	-44.0	101.2	116	0	42.4
	2		6.26	21.8	21.6	28.6	22.7	852	41	46.4	0.6	181.7	198	65	41.3
	3		4.26	25.6	23.1	31.2	12.7	591	39	42.1	0.8	130.2	147	49	39.6
	4		6.25	24.5	26.4	25.8	15.8	539	44	48.4	1.1	206.8	231	42	48.3
	5		5.27	24.9	27.9	24.2	17.9	863	50	49.5	0.6	177.0	201	50	46.3
	6		4.37	20.8	30.6	26.5	0.0	429	41	39.4	1.0	91.8	118	0	43.7

计算结果从计算点 $F_1=1.0$ 开始,对应的 μ_{b1} 约为 0.038 7,直到计算点 $F_6=1.5$,与此对应的 μ_{b6} 约为 -0.018 0,因此,该边坡在临界加速度系数 μ_b 为 0 时对应的安全稳定系数 F 的值在 1.4~1.5 之

间,最后依据数值分析原理插值求得 μ_b 为 0 时的 F 值^[12],具体步骤如下:令 $x_i=F_i$,取后 3 个计算点进行函数内插值, F_i 分别为 1.3、1.4、1.5, μ_{bi} 分别为 0.015 1、0.002 5、-0.018 0;令 $y_i=f(x_i)=\mu_{bi}$;采

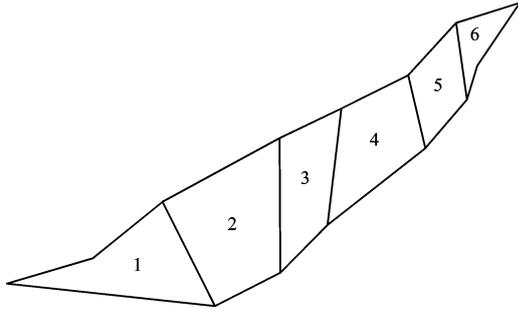


图 3 计算模型

Fig. 3 Calculation model

样点的函数值 x_i 分别为 1.3、1.4、1.5, y_i 分别为 0.015 1、0.002 5、-0.018 0。

问题转化为求方程 $f(x_i)=0$ 在 1.3~1.5 之间的近似根 x^* , 并使误差尽可能小。对 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 进行二次插值, 得拉格朗日插值多项式为

$$L_2(y) = f^{-1}(y_0) \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)} + f^{-1}(y_1) \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)} + f^{-1}(y_2) \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)} \quad (19)$$

将 $y=0$, $y_0=0.015 1$, $y_1=0.002 5$, $y_2=-0.018 0$ 代入式(19)得

$$x^* \approx L_2(0) = 1.416 052 3$$

因此, 该边坡的安全稳定系数约为 1.416。

5 结 语

本文应用传统的 Sarma 法力学模型, 避免了像其他方法那样需要假设一些条件。根据滑体的静力平衡条件, 推导得到临界加速度系数的表达式, 然后得出临界加速度系数与安全稳定系数之间的关系, 充分利用它们之间的递减函数关系, 求得安全稳定性系数, 并用数值分析原理计算求得安全稳定系数的近似解。与传统的 Sarma 法相比, 该改进的 Sarma 法无需迭代, 并简少了计算步骤和大量的运算次数。通过算例进行了分析验证, 计算结果基本满足要求。

参 考 文 献 :

References :

- [1] SARMA S K. Stability analysis of embankments and slopes[J]. Geotechnique, 1973, 23(3): 423-433.
- [2] SARMA S K. Critical acceleration vs. static factor of safety

in stability analysis of earth dams and embankments[J]. Geotechnique, 1974, 24(4): 661-665.

- [3] MORGENSTERN N R, PRICE V E. The analysis of stability of general slip surface[J]. Geotechnique, 1965, 15(1): 79-93.
- [4] WONG F S. Slope reliability and response surface method[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(1): 32-53.
- [5] 朱大勇, 范鹏贤, 郭志昆. 关于 Sarma 法改进算法的补充[J]. 岩土力学与工程学报, 2006, 25(11): 2343-2345. ZHU Da-yong, FAN Peng-xian, GUO Zhi-kun. Complementarities to modified computation procedure of Sarma method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(11): 2343-2345. (in Chinese)
- [6] 王 旭, 李显忠. 结合 Morgenstern-Price 法与 Sarma 法计算岩质-土质混合边坡稳定性[J]. 工程质量, 2010, 28(8): 72-75, 78. WANG Xu, LI Xian-zhong. The stability calculation of the soil-rock combined with Morgenstern-Price method and Sarma method[J]. Quality of Civil Engineering and Construction, 2010, 28(8): 72-75, 78. (in Chinese)
- [7] 康海贵, 李 炜. 基于安全系数解析式的边坡稳定评价体系研究[J]. 中国公路学报, 2008, 21(3): 1-5. KANG Hai-gui, LI Wei. Research on evaluated system for slope reliability based on calculation formulae of safety factor[J]. China Journal of Highway and Transport, 2008, 21(3): 1-5. (in Chinese)
- [8] 梧 松, 郑荣跃. 改进局部安全系数法在土坡稳定性分析中的应用[J]. 岩土力学, 2004, 25(11): 1766-1769. WU Song, ZHENG Rong-yue. Application of variable factor of safety method to slope stability analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(11): 1766-1769. (in Chinese)
- [9] CHEN W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Co., 1975.
- [10] 姚爱军, 苏永华. 复杂岩质边坡锚固工程地震敏感性分析[J]. 土木工程学报, 2003, 36(11): 34-38. YAO Ai-jun, SU Yong-hua. A method for stability of slope engineering with complicated rock-mass[J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(11): 34-38. (in Chinese)
- [11] 苏永华, 赵明华, 邹志鹏, 等. 边坡稳定性分析的 Sarma 模式及可靠度计算方法[J]. 水利学报, 2006, 37(4): 457-463. SU Yong-hua, ZHAO Ming-hua, ZOU Zhi-peng, et al. Sarma model for slope stability analysis and its reliability degree calculation method [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 37(4): 457-463. (in Chinese)
- [12] 汪时奇. 一类提高插值算法精度的数据变换法[J]. 上海机械学院学报, 1986, 8(2): 63-68. WANG Shi-qi. A kind of data-transformation methods increasing the accuracy of interpolations [J]. Journal of Shanghai Institute of Mechanical Engineering, 1986, 8(2): 63-68. (in Chinese)