

文章编号:1671-1637(2019)01-0017-07

双线性黏聚区模型在混凝土路面损伤 开裂分析中的应用

周正峰^{1,2,3}, 蒲卓桁^{1,2,3}, 唐基华^{1,2,3}

(1. 西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学 道路工程四川省重点实验室,
四川 成都 610031; 3. 西南交通大学 高速铁路线路工程教育部重点实验室, 四川 成都 610031)

摘要:为了揭示混凝土路面的损伤开裂机理及其对承载力的影响,考虑混凝土材料的弹塑性,应用非线性断裂力学中的双线性黏聚区模型,结合 ABAQUS 有限元软件,在预计开裂部位布设黏结单元,模拟了四点加载小梁试件从弹性响应到断裂失效的全过程,以验证双线性黏聚区模型在混凝土损伤开裂分析中的适用性;应用双线性黏聚区模型分析了 Winkler 地基上混凝土板的断裂特性和损伤后的承载力衰减。分析结果表明:在加载小梁受荷全过程中,梁底应力经历了线性增大、达到混凝土极限强度后减小、最大点上移与变为 0 等阶段,作用力-加载位移变化与已有研究一致;在加载全过程中,混凝土板的截面应力分布变化与小梁类似;混凝土板在损伤阶段承载力会持续增大,但由于板的支承条件与四点加载小梁不同,板的断裂近似于脆性断裂,无明显承载力衰减过程,板断裂时的极限承载力与弹性阶段临界状态承载力之比为 1.32;混凝土板发生初始损伤后,极限承载力最大会衰减至未损伤板的 87%,且随着初始损伤程度的增加,极限承载力衰减速率变大。

关键词:路面工程;混凝土路面;损伤开裂;黏聚区模型;有限元方法;承载力

中图分类号:U416.217 **文献标志码:**A

Application of bilinear cohesive zone model in damage and cracking analysis of concrete pavement

ZHOU Zheng-feng^{1,2,3}, PU Zhuo-heng^{1,2,3}, TANG Ji-hua^{1,2,3}

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China; 2. Key Laboratory of Highway Engineering of Sichuan Province, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China; 3. Key Laboratory of High-speed Railway Engineering of Ministry of Education, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China)

Abstract: In order to reveal the damage and cracking mechanisms and their impact on the bearing capacity of concrete pavement, the elasticity and plasticity of concrete material were considered. By using the bilinear cohesive zone model in non-linear fracture mechanics, the cohesive elements were inserted into the potential path of crack propagation based on ABAQUS finite element software, and the whole process from elastic response to damage failure was modeled for a four-point loading beam. The reliability of bilinear cohesive zone model for the analysis of concrete damage and cracking was verified. By using the bilinear cohesive zone model, the cracking characteristics and the decrease of bearing capacity after the initial damage of a concrete slab on

收稿日期:2018-09-07

基金项目:国家自然科学基金项目(51878575)

作者简介:周正峰(1981-),男,湖北荆州人,西南交通大学副教授,工学博士,从事道路与机场工程研究。

Winkler foundation were analyzed as well. Analysis result indicates that under the entire process of loading, the stresses at the bottom of the beam experience the phases of increasing linearly, decreasing after reaching the concrete flexural strength, the maximum stress point moving upwards, and reducing to 0. The load-displacement relationship on the beam is in accordance to the existing results. For the concrete slab under the entire process of loading, the variations of stress distribution at the section are similar to those of the beam. The bearing capacity of concrete slab increases continuously, but for its supporting condition is different from that of the beam. The failure of concrete slab appears to be brittle, and shows no obvious decay. The ratio of the ultimate bearing capacity to the critical bearing capacity at the elastic phase is 1.32. Once the initial damage of concrete slab occurs, the ultimate bearing capacity will decrease at most to 87% of undamaged slab. The decay rate of ultimate bearing capacity increases with the degree of initial damage. 1 tab, 10 figs, 30 refs.

Key words: pavement engineering; concrete pavement; damage and cracking; cohesive zone model; finite element method; bearing capacity

Author resume: ZHOU Zheng-feng(1981-), male, associate professor, PhD, zhouzf126@126.com.

0 引 言

目前,在混凝土路面结构分析与设计中,通常是以混凝土板底应力或疲劳应力达到混凝土材料强度作为路面开裂损坏的临界状态。而实际上,混凝土并非完全脆性材料,开裂之前还存在类似塑性材料的软化行为,板底应力达到混凝土材料强度后,裂缝在混凝土板内还有个扩展过程,结构整体并非立即失效,尤其是在分析结构的极限承载力时,需要考虑混凝土材料的塑性性质^[1]。针对这些问题,本文应用断裂力学中的双线性黏聚区模型(Bilinear Cohesive Zone Model, BCZM)模拟混凝土材料达到极限强度后的塑性软化行为,对混凝土路面的断裂机理以及损伤后的结构承载力衰减进行分析探讨。

应用断裂力学分析路面开裂问题已有很多研究,并且已成为路面结构分析的发展方向之一。早期应用线弹性断裂力学方法由于计算结果与实际路面响应不符,后来发展了基于非线性断裂力学的假想裂缝模型或相似模型^[2-10]。黏聚区模型是从材料非线性断裂力学研究中发展而来的,最早由 Barenblatt 提出,通过在裂纹尖端设置一个应力连续的黏聚区,以消除裂纹尖端的奇异性^[11-12];Hillerborg 等借助有限元方法,提出类似黏聚区模型的假想裂缝模型来考虑混凝土开裂前的软化行为,分析了混凝土梁受弯时裂缝的形成和发展过程^[13]。由于黏聚区模型能够方便结合数值方法进行计算,成为分析混凝土结构和路面结构开裂的有力工具,逐渐受到

广大学者的关注。Brincker 等基于假想裂缝模型,研究了三点加载小梁断裂分析的稳定性问题及假想裂缝模型形式^[14];Ulfkjær 等应用双线性黏聚区模型,采用解析法推导了小梁加载过程中应力-裂缝宽度计算公式^[15];Elices 等介绍了采用反分析方法确定黏聚区模型的软化方程,并分析了黏聚区模型在混凝土、玻璃聚合物、钢材等开裂分析中的应用^[16];Song 等针对沥青混凝土开槽小梁断裂试验,分析了其混合模式断裂特性^[17-18];Roesler 等通过试验和数值模拟,应用双线性软化模型分析了三点加载开槽小梁的开裂过程^[19];Ferreira 等结合图像位移识别法和边界单元法,应用黏聚区模型同样分析了开槽小梁的断裂过程^[20];Kim 阐述了黏聚区模型在沥青材料和沥青路面开裂分析中的应用情况^[21];周正峰等结合有限元方法,采用双线性黏聚区模型分析了沥青路面反射裂缝的形成机理^[22];Roesler 等分析了黏聚区模型参数的确定方法^[23-25];Gaedicke 等应用黏聚区模型分析了 Winkler 地基上混凝土梁和板的极限承载力^[26-27]。

相对于传统线弹性断裂力学模型,考虑材料断裂前软化行为的非线性断裂力学模型,虽在理论上能够分析结构开裂及裂缝扩展问题,但实际上面临复杂的材料非线性和结构时,计算分析往往十分困难。目前,相关研究报道大多数也是针对一些有开槽或无开槽简支梁等简单构件受弯或受拉的开裂分析^[28-29],而相对复杂受力情况下的研究较少。

本文结合 ABAQUS 有限元软件,首先介绍双线性黏聚区模型模拟结构损伤开裂的基本原理,然

后通过对一简支梁试件加载全过程的模拟,验证黏聚区模型在损伤开裂分析中的适用性,再应用黏聚区模型,对 Winkler 地基上混凝土板的断裂特性以及发生损伤后极限承载力的衰减进行分析。本文研究方法和结果可为路面结构损伤开裂相关分析提供参考。

1 黏聚区模型与参数

1.1 黏聚区模型概述

材料在受力直至开裂过程中,因应变能增量与表面自由能增量之间的关系,会产生抵抗裂纹扩展的阻力。基于牵引力-分离法则的黏聚区模型可以很好地模拟裂缝扩展中的扩展阻力(牵引力)与裂缝张开位移(分离)之间的关系。

黏聚区模型将裂缝扩展分为 4 个阶段,见图 1。第 I 阶段为材料损伤前的线弹性阶段,材料应力与应变成正比;第 II 阶段为材料初始损伤点,对应材料应力达到最大值,但此时材料并没有形成宏观裂缝,而是将出现有初始损伤的假想裂缝,应力也不会立即降为 0;第 III 阶段为材料损伤演化阶段,材料软化,刚度不断降低,假想裂缝扩展阻力减小而张开位移增大;第 IV 阶段为材料失效阶段,当假想裂缝张开位移或断裂应变能达到材料属性时,材料完全失效,裂缝扩展阻力消失,假想裂缝变为新的宏观裂纹面。所谓双线性黏聚区模型,是指第 I 阶段和第 III 阶段材料应力与应变均遵从线性关系。

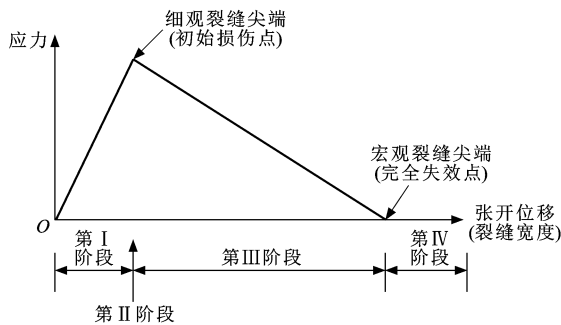


图 1 黏聚区模型

Fig. 1 Cohesive zone model

1.2 黏结单元本构关系

损伤开裂分析采用 ABAQUS 三维黏结单元 COH3D8,牵引力-分离法则实际上描述的是单元厚度方向上下两平面之间应力与相对位移的关系,即该单元只存在沿厚度方向(n 方向)的拉伸变形,以及沿垂直于厚度方向(s, t 方向)的剪切变形。单元 3 个方向的失效分别对应于断裂力学中的 I、II、III 型断裂。单元各方向的应力与变形关系为

$$\begin{bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{bmatrix} = (1-d) \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{ns} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{nt} & K_{st} & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \\ \delta_t \end{bmatrix} =$$

$$(1-d) \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = (1-d) \mathbf{K} \mathbf{T} \boldsymbol{\varepsilon} = (1-d) \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

式中: t_n, t_s, t_t 分别为 n, s, t 方向的应力分量; $\boldsymbol{\delta}$ 为位移矢量; $\delta_n, \delta_s, \delta_t$ 分别为 n, s, t 方向的位移分量; \mathbf{K} 为刚度矩阵; K_{ij} 为 j 方向位移对 i 方向应力刚度; \mathbf{T} 为单元层厚度; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变矢量; \mathbf{E} 为单元弹性模量; d 为损伤变量。

基于牵引力-分离法则的黏结单元仅在裂缝扩展路径上设置一层,单元刚度和位移可以转换为单元弹性模量和应变。损伤变量用来表示单元发生损伤后刚度的折减程度,在单元发生初始损伤前,损伤变量为 0,单元刚度保持恒定,单元各方向的应力与变形为线弹性关系;在单元发生初始损伤后,损伤变量从 0 到 1 单调增加,单元刚度逐渐减小,损伤变量为 1 时表示单元完全失效。

1.3 黏结单元的损伤与失效

1.3.1 初始损伤准则

当单元应力或应变达到初始损伤准则时,单元发生初始损伤,初始损伤准则有最大应力或应变准则、二次应力或应变准则,最大应力准则表示为

$$\max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0} \right\} = 1 \quad (2)$$

式中: t_i^0 为纯 i 方向受力发生初始损伤时的应力分量; $\langle \cdot \rangle$ 为 Macaulay 算子,表示不考虑单元法向 n 的压应力或压应变。

1.3.2 线性损伤演化模型

单元发生初始损伤后,如果进一步受力,将进入损伤演化阶段,直至失效。图 2 中右边线性递减直线为线性损伤演化过程,表示单元发生损伤后应力相对初始损伤点的位移增量线性衰减。若在损伤演化阶段卸载,则应力-应变曲线沿割线回到原点,再加载时又沿此割线发展直至与原曲线相交。

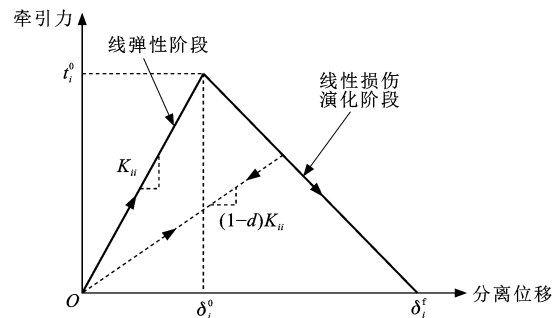


图 2 双线性黏结单元

Fig. 2 Bilinear cohesive element

图 2 中: δ_i^0 为纯 i 方向受力发生初始损伤时的位移分量; δ_i^f 为完全失效时 i 方向的位移分量; K_{ii} 为纯 i 方向的刚度。

1.3.3 完全失效准则

单元完全失效可基于失效位移或者断裂能, 它们实际上是等效的, 单元的断裂能即为图 2 中的牵引力-位移曲线所围的面积。

考虑损伤演化过程中拉伸和剪切变形的综合作用, 引入单元有效位移 δ_m

$$\delta_m = \sqrt{(\delta_n^0)^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2} \quad (3)$$

单元发生初始损伤时的有效位移为 δ_m^0 , 单元失效时的有效位移为失效位移 δ_m^f , 对于线性损伤演化模型, 损伤变量 $d^{[30]}$ 为

$$d = \frac{\delta_m^f (\delta_m - \delta_m^0)}{\delta_m (\delta_m^f - \delta_m^0)} \quad (4)$$

1.4 黏结单元模拟混凝土的参数

在表征双线性黏结单元开裂失效 4 个阶段时, 若不考虑材料的各向异性, 需要 4 个基本参数, 即线弹性阶段的材料刚度、初始损伤应力以及对应的初始损伤位移、材料失效位移或断裂能, 其中, 材料刚度可以根据单元层厚度按式(1)由单元弹性模量转换得到, 根据试验确定材料失效位移或断裂能。材料参数^[26]见表 1。

表 1 混凝土材料参数

Tab. 1 Concrete material parameters

参数	数值
弹性模量/GPa	32.04
泊松比	0.15
抗拉强度/MPa	4.15
断裂能/(N·m ⁻¹)	167
开裂位移/mm	0.076 2

2 黏聚区模型验证

2.1 小梁加载分析模型

采用基于 ABAQUS 的三维有限元模型模拟混凝土小梁加载全过程, 梁的几何尺寸以及加载模型见图 3, 其中梁的宽度为 80 mm。采用三维实体单元 C3D8 模拟混凝土梁, 在梁跨中位置设置三维黏结单元 COH3D8, 模拟梁潜在开裂部位, 不考虑梁其他部位的开裂。

2.2 小梁截面应力分析

图 4~6 分别为梁加载过程中处于弹性阶段、损伤阶段和开裂阶段时, 对应的跨中截面正应力分布随加载位移的变化。

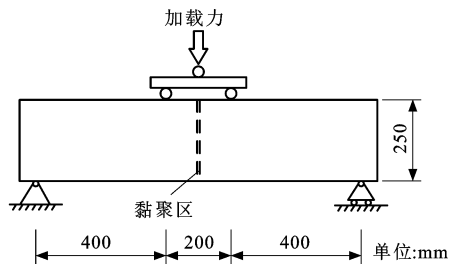


图 3 梁四点加载模型

Fig. 3 Model of beam subjected to four-point loading

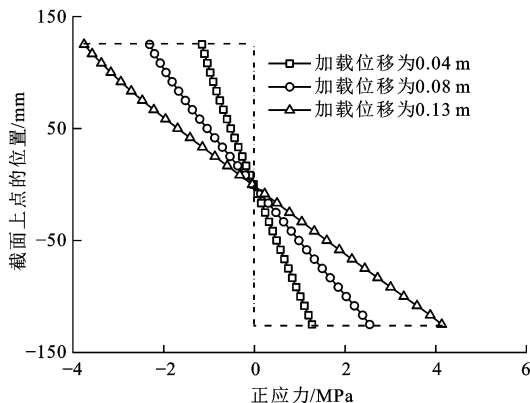


图 4 弹性阶段梁截面正应力分布

Fig. 4 Normal stress distributions along beam section at elasticity stage

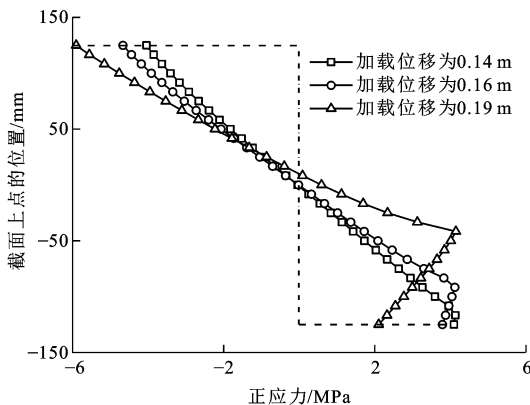


图 5 损伤阶段梁截面正应力分布

Fig. 5 Normal stress distributions along beam section at damage stage

由图 4 可见: 当加载位移小于 0.13 mm 时, 梁截面最大正应力小于混凝土的抗拉强度, 整个梁截面上混凝土的响应为线弹性, 应力与应变成正比; 梁截面上各点处的正应力与距中性轴的距离成正比, 且中性轴位置保持不变; 当加载位移为 0.13 mm 时, 梁底拉应力达到混凝土抗拉强度 4.15 MPa。

由图 5 可见: 随着加载位移的增大, 梁截面底部正应力计算值大于混凝土抗拉强度, 混凝土出现初始损伤, 承担的拉应力相应变小; 最大拉应力位置由梁

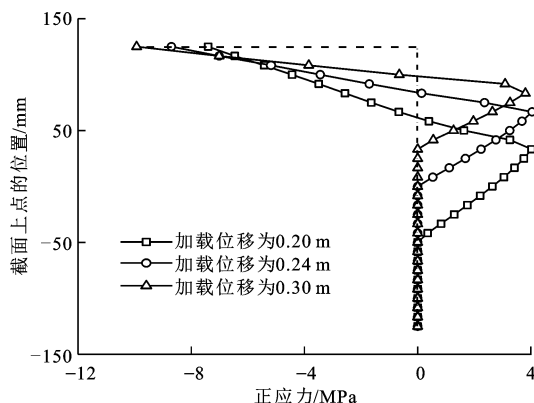


图 6 开裂阶段梁截面正应力分布

Fig. 6 Normal stress distributions along beam section at cracking stage

底向上移动,即应力达到混凝土抗拉强度 4.15 MPa 的点往上移动,中性轴也随之上移,梁底应力发生近似梯形的重分布;而中性轴附近混凝土因拉应力较小,与中性轴以上受压区混凝土应力仍然呈线性分布。

由图 6 可见:当梁截面上受拉区混凝土的断裂能(开裂位移)达到极限状态时,混凝土开裂而退出工作,开裂混凝土承担的拉应力变为 0;应力达到混凝土抗拉强度 4.15 MPa 的点不断上移,中性轴随之不断上移,梁上部的压应力不断增大,但无论受拉区还是受压区的面积都迅速减小,梁发生断裂破坏。

可见,采用双线性黏结单元模拟的梁加载过程截面应力变化规律,与已有研究^[15-26]是一致的。

2.3 小梁荷载-位移分析

图 7 为梁上作用荷载随加载位移的变化,按梁底黏结单元的应力状态,对应将曲线划分为弹性、损伤、开裂 3 个阶段。由图 7 可见:当加载位移为 0.13 mm 时,梁底正应力达到混凝土的抗拉强度,此时加载力的大小是使整个梁处于弹性工作状态的

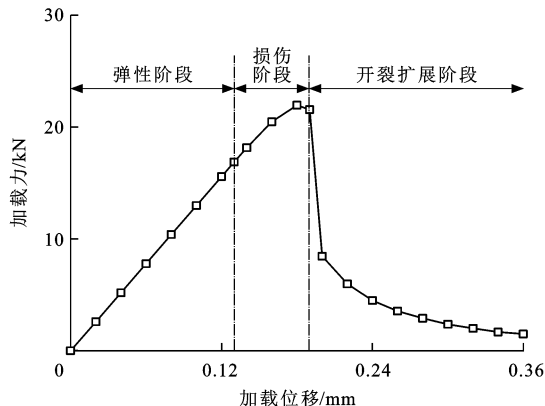


图 7 梁上荷载-位移曲线

Fig. 7 Load-displacement curve for beam

临界值;随后,随着加载位移的增大,梁下部受拉区混凝土出现了初始损伤,但整个梁的承载力继续增大,当加载位移为 0.18 mm 时,梁达到极限承载力,为加载位移 0.13 mm 时梁上作用力的 1.3 倍,梁达到极限承载力之后,随着损伤混凝土的增多,承载力开始下降;随着加载位移的进一步增大,因梁底部达到断裂能(开裂位移)的混凝土出现开裂而不能继续承受荷载,整个梁也迅速断裂,荷载-位移曲线急剧下降。

3 黏聚区模型在路面损伤开裂分析中的应用

以 Winkler 地基上的混凝土板为研究对象,说明黏聚区模型在路面损伤开裂分析中的应用,并揭示混凝土板的断裂特性,以及出现初始损伤后混凝土板极限承载力的衰减程度。

混凝土板的平面尺寸为 4.5 m×4.5 m,厚度为 0.3 m,Winkler 地基反应模量为 60 MN·m⁻³,在板中位置设置黏结单元,模拟板中受荷后的潜在开裂区域。混凝土材料参数同表 1。

3.1 混凝土板的断裂分析

图 8 为混凝土板中位置作用荷载随加载位移的变化,可见:Winkler 地基上的板在损伤阶段的承载力随板中挠度持续增大,并没有明显的衰减过程,板的极限承载力(对应板中挠度 1.34 mm)与弹性阶段临界状态承载力(对应板中挠度 1.00 mm)之比为 1.32,与简支梁大致相等。由于板底支承条件为 Winkler 地基,板在损伤阶段承载力没有出现类似简支梁的明显衰减过程,板的断裂表现出脆性断裂的特性。在板断裂之后,板的受力状态由单块板的板中受荷变为断开 2 块板的板边受荷,板的承载能力又随加载位移继续增大,这与简支梁的开裂扩展

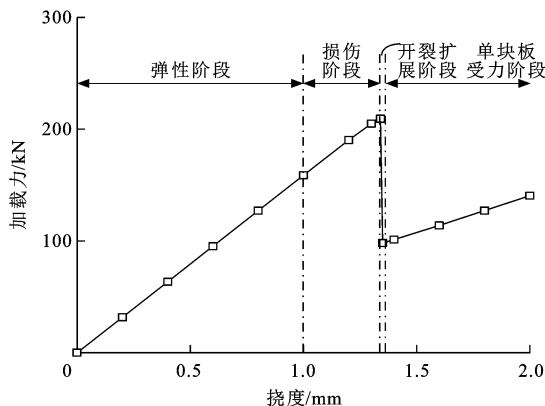


图 8 混凝土板荷载-位移曲线

Fig. 8 Load-displacement curve for concrete slab

过程有所不同。

图 9 为混凝土板分别处于弹性阶段临界状态(板中挠度为 1.00 mm)、损伤阶段临界状态(板中挠度为 1.34 mm)和发生断裂(板中挠度为 1.35 mm)时截面正应力的分布,可见:Winkler 地基上的板在不同阶段受拉区正应力的分布与简支梁截面正应力的分布发展过程相似,经历了线弹性增大、最大拉应力位置由板底上移、板底拉应力为 0 的区域不断增大的演化过程。

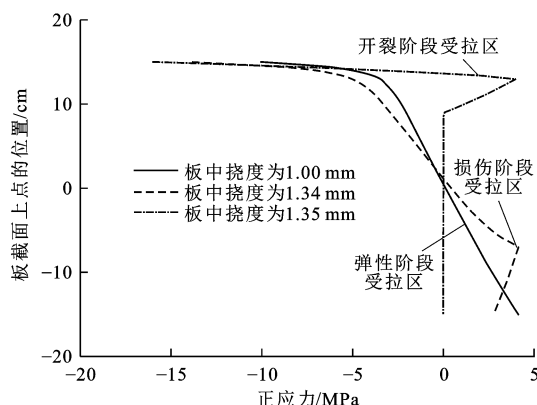


图 9 板截面正应力分布

Fig. 9 Normal stress distributions along slab section

3.2 混凝土板损伤后的承载力折减分析

与单元损伤后再加载类似,对于混凝土板结构整体而言,当板在损伤阶段卸载后,由于板内部分混凝土发生了初始损伤,板结构整体极限承载力就要小于板损伤之前的极限承载力。为了分析板在初始损伤之后极限承载力的折减,采用如下分析步骤:首先使板受弯至损伤阶段,然后卸载,此时板内部分混凝土出现了初始损伤,但没有出现宏观裂缝,再对板侧面施加拉应力,分析板受拉断裂时的极限应力与板未发生初始损伤时的极限应力之比。

应用前面分析结果,选取板中挠度分别为 1.10、1.20、1.30 和 1.34 mm 时的受弯状态代表不同程度的初始损伤,采用上述分析步骤,得到板受拉断裂时的极限应力与未发生初始损伤时板的极限应力之比,如图 10 所示,可见:板发生初始损伤后,极限承载力最大会衰减至完好板的 87%,且随着初始损伤程度的增大,极限承载力衰减速率越来越大。

4 结 语

(1)结合 ABAQUS 有限元软件,详细介绍了基于牵引力-分离法则的双线性黏聚区模型性质,包括损伤前的线弹性行为、初始损伤准则和断裂失效准则等。

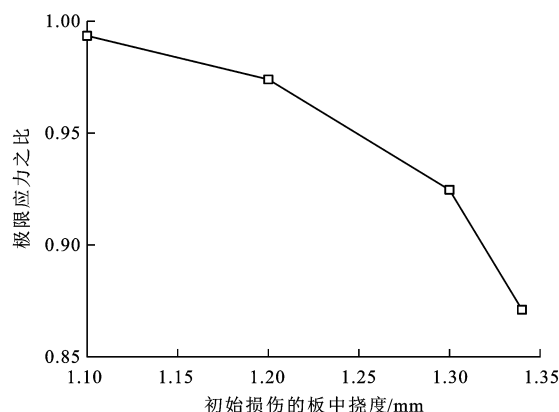


图 10 初始损伤板与未损伤板的极限应力之比

Fig. 10 Ratios of ultimate stress of slab with initial damage to that of undamaged slab

(2)应用黏聚区模型对混凝土小梁试件四点加载全过程进行了模拟,揭示了梁在弹性阶段、初始损伤阶段和断裂阶段截面应力分布以及作用力-加载位移的变化规律,验证了黏聚区模型在损伤开裂分析中的适用性。

(3)应用黏聚区模型对 Winkler 地基上混凝土板的断裂进行了分析,表明 Winkler 地基上的板即使在损伤阶段承载力也会持续增大,无明显的承载力衰减,板的断裂近似于脆性断裂,板的极限承载力与弹性阶段临界状态承载力之比为 1.32。

(4)应用黏聚区模型对 Winkler 地基上混凝土板在初始损伤后,结构整体极限承载力的衰减进行了分析,表明板发生初始损伤后,极限承载力最大会衰减至未损伤板的 87%,且随着初始损伤程度的增大,极限承载力衰减速率越来越大。

(5)混凝土的损伤演化也可能呈现非完全线性特征,需要通过试验分析材料的实际损伤演化模型及参数。同时应用黏聚区模型需要预先设定结构开裂位置,对于开裂位置未知的情况并不适用。

参考文献:

References:

- [1] XIAO Yang-jian, CHEN Zeng-shun, ZHOU Jian-ting, et al. Concrete plastic-damage factor for finite element analysis: concept, simulation, and experiment [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(9): 1-10.
- [2] IOANNIDES A M. Fracture mechanics in pavement engineering: the specimen-size effect [J]. Transportation Research Record, 1997(1568): 10-16.
- [3] RAMSAMOOJ D V, LIN G S, RAMADAN J. Stresses at joints and cracks in highway and airport pavements [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 60: 507-518.
- [4] CASTELL M A, INGRAFFEA A R, IRWIN L H. Fatigue

- crack growth in pavements[J]. *Journal of Transportation Engineering*, 2000, 126(4): 283-290.
- [5] JENSEN E A, HANSEN W. Crack resistance of jointed plain concrete pavements[J]. *Transportation Research Record*, 2002(1809): 60-65.
- [6] IOANNIDES A M, PENG Jun, SWINDLER JR J R. ABAQUS model for PCC slab cracking[J]. *International Journal of Pavement Engineering*, 2006, 7(4): 311-321.
- [7] GAEDICKE C, ROESLER J, SHAH S. Fatigue crack growth prediction in concrete slabs[J]. *International Journal of Fatigue*, 2009, 31: 1309-1317.
- [8] AMERI M, MANSOURIAN A, KHAVAS M H, et al. Cracked asphalt pavement under traffic loading—a 3D finite element analysis[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, 78(8): 1817-1826.
- [9] LING Jian-ming, TAO Ze-feng, QIAN Jin-song, et al. Investigation the influences of geotextile on reducing the thermal reflective cracking using XFEM[J]. *International Journal of Pavement Engineering*, 2018, 19(5): 391-398.
- [10] JENQ Y, SHAH S P. Two parameter fracture model for concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985, 111(10): 1227-1241.
- [11] BARENBLATT G I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, 23(3): 622-636.
- [12] BARENBLATT G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, 7: 55-129.
- [13] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. *Cement and Concrete Research*, 1976, 6(6): 773-781.
- [14] BRINCKER R, DAHL H. Fictitious crack model of concrete fracture[J]. *Magazine of Concrete Research*, 1989, 41(147): 79-86.
- [15] ULFKJÆR J P, KRENK S, BRINCKER R. Analytical model for fictitious crack propagation in concrete beams[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(1): 7-15.
- [16] ELICES M, GUINEA G V, GOMEZ J, et al. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(2): 137-163.
- [17] SONG S H, PAULINO G H, BUTTLAR W G. Simulation of crack propagation in asphalt concrete using an intrinsic cohesive zone model[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2006, 132(11): 1215-1223.
- [18] SONG S H, PAULINO G H, BUTTLAR W G. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(18): 2829-2848.
- [19] ROESLER J, PAULINO G H, PARK K, et al. Concrete fracture prediction using bilinear softening[J]. *Cement and Concrete Composites*, 2007, 29(4): 300-312.
- [20] FERREIRA M D C, VENTURINI W S, HILD F. On the analysis of notched concrete beams: from measurement with digital image correlation to identification with boundary element method of a cohesive model[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, 78(1): 71-84.
- [21] KIM Y R. Cohesive zone model to predict fracture in bituminous materials and asphaltic pavements: state-of-the-art review[J]. *International Journal of Pavement Engineering*, 2011, 12(4): 343-356.
- [22] 周正峰,蒲卓桁,刘超.黏聚区模型在沥青路面反射裂缝模拟中的应用[J]. *交通运输工程学报*, 2018, 18(3): 1-10.
ZHOU Zheng-feng, PU Zhuo-heng, LIU Chao. Application of cohesive zone model to simulate reflective crack of asphalt pavement[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2018, 18(3): 1-10. (in Chinese)
- [23] ROESLER J, PAULINO G, GAEDICKE C, et al. Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements[J]. *Transportation Research Record*, 2007(2037): 40-50.
- [24] PARK K, PAULINO G H, ROESLER J R. Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(13): 3806-3818.
- [25] PARK K, PAULINO G H, ROESLER JR. Cohesive fracture model for functionally graded fiber reinforced concrete[J]. *Cement and Concrete Research*, 2010, 40: 956-965.
- [26] GAEDICKE C, ROESLER J. Fracture-based method to determine flexural capacity of concrete beams on soil[J]. *Road Materials and Pavement Design*, 2010, 11(2): 361-385.
- [27] GAEDICKE C, ROESLER J, EVANGELISTA JR F. Three-dimensional cohesive crack model prediction of the flexural capacity of concrete slabs on soil[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, 94: 1-12.
- [28] 管俊峰,卿龙邦,赵顺波.混凝土三点弯曲梁裂缝断裂全过程数值模拟研究[J]. *计算力学学报*, 2013, 30(1): 143-148, 155.
GUAN Jun-feng, QING Long-bang, ZHAO Shun-bo. Research on numerical simulation on the whole cracking processes of three-point bending notch concrete beams[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(1): 143-148, 155. (in Chinese)
- [29] LU W Y, HU S W. Effect of large crack-depth ratio on three-point bending concrete beam with single edge notch[J]. *Materials Research Innovations*, 2015, 19(S8): 312-317.
- [30] CAMANHO P P, DAVILA C G. Mix-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials[R]. Washington DC: NASA, 2002.