

文章编号:1671-1637(2018)02-0061-11

曲轴动压滑动轴承非线性油膜力解析方法

张永芳^{1,2}, 王霞^{1,2}, 黄悦^{1,2}, 李莎³, 刘成³, 吕延军³

(1. 西安理工大学 印刷包装与数字媒体学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安交通大学

机械结构强度与振动国家重点实验室, 陕西 西安 710049; 3. 西安理工大学

机械制造装备陕西省重点实验室, 陕西 西安 710048)

摘要:基于分离变量法、Sturm-Liouville理论与下游 Reynolds 边界条件,提出了一种求解曲轴动压滑动轴承非线性油膜力的解析方法;将轴承不可压缩流体动压润滑 Reynolds 方程的压力分布表示为特解加通解的形式;运用分离变量法,将油膜压力分布的特解和通解分别表示为周向分离函数和轴向分离函数相加和相乘的形式;为了便于求解,对油膜压力特解的周向分离函数进行 Sommerfeld 变换,通过连续性条件确定油膜的终止位置角;由于油膜压力通解的周向分离函数没有直接解的形式,通过油膜厚度的逼近函数将油膜压力通解的周向分离函数转化为 Sturm-Liouville 型方程,根据边界条件求得本征值和本征函数系,通过三角函数的无穷级数展开表示油膜压力通解的周向分离函数;采用含本征值的双曲正切函数表示油膜压力通解的轴向分离函数;在润滑油膜的完备区域,对油膜压力分布的解析表达式进行积分,求得曲轴轴承的非线性油膜力。分析结果表明:采用解析方法计算的非线性油膜力与有限差分法的计算结果吻合较好,偏心率较小时非线性油膜力仅相差约 5%;当轴承偏心率由 0.2 增大到 0.6 时,油膜终止位置角的最大值减小了 13.5%;当量纲为 1 的速度扰动由 0 增大到 0.03 时,油膜终止位置角变化了 3.3%;当本征值的个数不小于 20 时,量纲为 1 的径向、切向通解油膜力的变化较小,取值分别保持在 -2.8、4.6 附近。由此可见:采用解析方法能够准确求解曲轴动压滑动轴承的非线性油膜力;轴承偏心率对油膜破裂的影响较大,且偏心率较大时油膜易破裂;相对于轴承偏心率而言,速度扰动对油膜破裂的影响较小;当本征值的个数不小于 20 时,油膜压力通解的计算精度较高,能够满足工程需要。

关键词:轮机工程;曲轴动压滑动轴承;分离变量法;非线性油膜力;Sturm-Liouville 理论

中图分类号:U664.2

文献标志码:A

Analytical method of nonlinear oil film force of hydrodynamic crankshaft journal bearing

ZHANG Yong-fang^{1,2}, WANG Xia^{1,2}, HUANG Yue^{1,2}, LI Sha³, LIU Cheng³, LU Yan-jun³

(1. Faculty of Printing, Packaging Engineering and Digital Media Technology, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi, China; 2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China; 3. Key Laboratory of Manufacturing Equipment of Shaanxi Province, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, Shaanxi, China)

Abstract: An analytical method was proposed for calculating the nonlinear oil film force of hydrodynamic crankshaft journal bearing based on variables separation method, Sturm-Liouville theory, and Reynolds boundary conditions. The oil film pressure distribution of Reynolds

收稿日期:2017-11-12

基金项目:国家自然科学基金项目(51505375);机械结构强度与振动国家重点实验室开放课题(SV2016-KF-10);陕西省自然科学基金项目(2014JM2-5082);陕西省教育厅重点实验室科学研究计划项目(15JS068)

作者简介:张永芳(1975-),女,内蒙古乌兰察布人,西安理工大学副教授,工学博士,从事机械动力学研究。

equation for incompressible fluid hydrodynamic lubrication of the bearing was expressed as an additive form of a particular solution and a homogeneous solution. By using variables separation method, the pressure distributions of particular solution and homogeneous solution were respectively split in an additive and multiplicative forms of circumferential separation function and axial separation function. For convenience, the circumferential separation function of particular solution was solved by using the Sommerfeld transformation, and the termination position angle of oil film was determined by using the continuity condition. Because there was no direct solution for the circumferential separation function of homogeneous solution, the circumferential separation function was transformed as Sturm-Liouville equation by using the approximation function of oil film thickness, and the eigenvalues and eigenfunctions were obtained by using the boundary conditions. The circumferential separation function of homogeneous solution was expanded by using the infinite series of trigonometric functions. The axial separation function of homogeneous solution was obtained by the hyperbolic tangent function with the eigenvalues. In the complete oil film field, the analytical expression of oil film pressure distribution was integrated to obtain the nonlinear oil film force of crankshaft bearing. Analysis result shows that the nonlinear oil film force calculated by the analytical method is good agreement with the value calculated by the finite difference method, and the difference is about 5% when the eccentricity ratio is small. When the eccentricity ratio rises from 0.2 to 0.6, the maximum value of termination position angle of oil film reduces by 13.5%. When the dimensionless speed disturbance rises from 0 to 0.03, a relative variation of 3.3% is obtained for the termination position angle of oil film. When the number of eigenvalues is greater than 20, the variations of homogeneous solutions of dimensionless oil film force in the radial and tangential directions are really small, and their values are about -2.8 and 4.6, respectively. Therefore, the analytical method can calculate the nonlinear oil film force of hydrodynamic crankshaft journal bearing accurately. The eccentricity ratio has a great influence on the rupture of oil film, and the rupture easily takes place when the eccentricity ratio is bigger. Compared with the eccentricity ratio, the speed disturbance has less influence on the rupture of oil film. A high calculation precision can be obtained for the homogeneous solution of dimensionless oil film force when the number of eigenvalues is not less than 20, which meets the requirement of engineering. 18 figs, 25 refs.

Key words: marine engineering; hydrodynamic crankshaft journal bearing; variables separation method; nonlinear oil film force; Sturm-Liouville theory

Author resume: ZHANG Yong-fang(1975-), female, associate professor, PhD, zhangyf@xaut.edu.cn.

0 引 言

内燃机是国家基础工业中重要的能源动力装备之一,流体动压滑动轴承-曲轴系统作为内燃机的关键部件,在旋转运动中实现能源转换和动力传递^[1-3]。由于流体动压滑动轴承非线性油膜力的作用,流体动压滑动轴承-曲轴系统往往呈现出分岔甚至混沌等非线性现象,会极大地影响内燃机的服役性能,甚至引发灾难性事故^[4],因此,有关动压滑动轴承非线性油膜力的研究受到了国内外相关学者的关注。

径向滑动轴承作为曲轴系统的重要支承部件,其宽径比通常为 0.8~1.0。目前,一些学者针对径向滑动轴承,基于无限短^[5-9]和无限长轴承^[10-11]假设,构建了轴承的非线性油膜力模型,研究了其支承的转子系统的非线性动力学行为和稳定性,但是,分别忽略了油膜力沿轴承周向和轴向的分布,仅在轴承宽径比较大或较小时具有较好的计算准确度,因此,对于宽径比为 0.8~1.0 的有限长曲轴动压滑动轴承,无限短和无限长轴承模型难以适用。

为了准确地计算有限长径向滑动轴承的非线性

油膜力, Xiao 等将油膜力及其 Jacobi 矩阵的计算转化为求解具有三对角系数矩阵的线性代数方程组,提出了一种基于变分不等式的非线性油膜力的数值求解算法^[12]; Lu 等基于变分约束原理,采用 8 节点等参有限元方法,给出了非线性油膜力及其 Jacobi 矩阵^[13-14]。上述有限长径向滑动轴承非线性油膜力的数值求解方法具有较好的计算精度,但计算效率相对较低。

为进一步提高有限长径向滑动轴承油膜力的求解效率,一些学者发展了计算非线性油膜力的近似解析法^[15-24]。Hirani 等基于无限长和无限短轴承的压力分布,对有限长滑动轴承的油膜压力分布进行了拟合,求得了轴承的非线性油膜力^[15]; Meruane 等基于 Hirani 等的研究,提出了非线性油膜力近似解析模型,将其通过 Taylor 级数展开近似求得刚度阻尼系数^[16]; Bastani 等在无限短和无限长轴承模型的基础上,通过校正函数组合求解了有限长动压滑动轴承的油膜力及其最大值,其结果与有限元方法的计算结果吻合较好^[17]; Wang 等运用分离变量法求得了 π 油膜假设下有限长径向滑动轴承非线性油膜力的近似解析解,其与数值法的计算结果较一致,且通过试验验证了其正确性^[18]; Vignolo 等运用摄动法,将宽径比的平方作为摄动参数,将 Ocvirk 数作为扩展参数,求得了 π 油膜假设时有限长径向滑动轴承 Reynolds 方程的近似解析解^[19]; Chasalevris 等基于 π 油膜假设,运用分离变量法给出了圆轴承与浮环轴承非线性油膜力的近似解析解^[20-21]; Zhang 等针对具有耦合应力流影响的紊流有限宽径向滑动轴承,基于多参数原理求得了轴承非线性油膜承载力的近似解析解^[22]; Gong 等运用正则摄动法,求解了小间隙和 π 油膜假设边界条件下有限宽径向滑动轴承非线性油膜力的近似解析解^[23]。上述研究均基于 π 油膜假设(即油膜的破裂位置角为 π)展开,对于曲轴系统支承部件的径向滑动轴承,润滑油膜在轴承发散区会破裂成条状,且油膜的破裂位置需根据下游 Reynolds 边界条件^[24-25]动态确定,因此,有必要基于下游 Reynolds 边界条件寻求曲轴轴承非线性油膜力的解析方法。

本文针对内燃机曲轴的支承部件流体动压滑动轴承,采用分离变量法和 Sturm-Liouville 理论,基于下游 Reynolds 边界条件得到了油膜压力分布的解析表达式,通过积分求得了轴承的非线性油膜力;将解析方法的计算结果与有限差分法的计算结果进行比较,以验证解析方法的正确性。

1 轴承油膜压力计算模型

图 1 为曲轴轴承油膜压力计算模型,图 2 为轴承剖面。图 1、2 中: O_b 为轴承中心; O_j 为轴颈中心; xO_by 为轴承坐标系; f_x 、 f_y 分别为 x 、 y (横、竖) 方向的轴承油膜力分量; f_r 、 f_t 分别为作用在轴颈上的径向油膜力和切向油膜力; W 为作用在轴颈上的外部载荷; ϕ 为从 y 轴的负方向顺时针旋转开始计量的角度; φ 为起始于偏位线的轴承周向坐标; e 为轴承偏心距; θ 为轴承偏位角; ω 为曲轴旋转角速度; h 为轴承任意位置处的油膜厚度; R 为轴承半径; r 为轴颈半径; B 为轴承宽度。

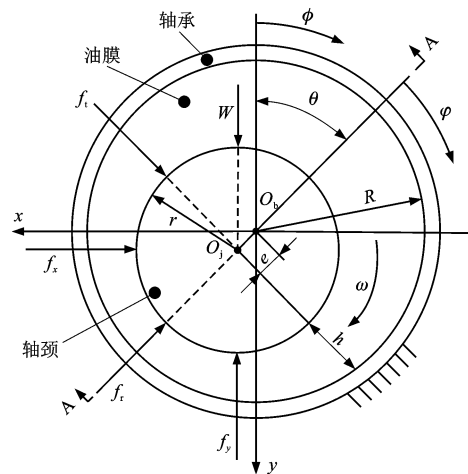


图 1 轴承油膜压力计算模型

Fig. 1 Calculation model of oil film pressure of bearing

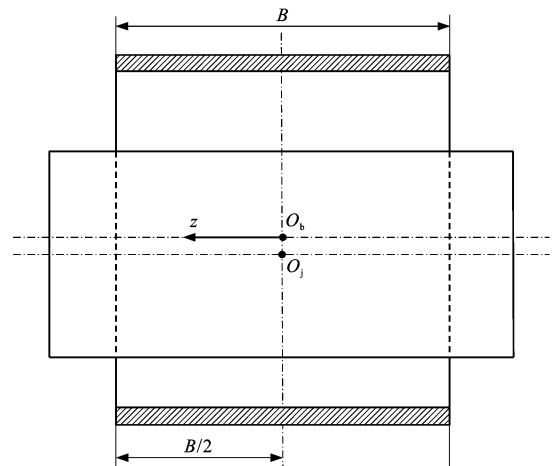


图 2 轴承 A-A 剖面

Fig. 2 A-A section of bearing

2 非线性油膜力求解

2.1 Reynolds 方程的分离变量

视曲轴轴承润滑油膜为不可压缩的非定常流动流体,则油膜密度 ρ 和动力黏度 μ 为常数时的有量

纲 Reynolds 方程可表示为

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

式中: p 为油膜压力; z 为轴承的轴向坐标; t 为时间。

为便于计算, 引入以下量纲为 1 的变量

$$\begin{cases} \lambda = 2z/B \\ H = 1 + \epsilon \cos(\varphi) \\ \epsilon = e/c \\ \tau = \omega t \\ \epsilon' = d\epsilon/d\tau \\ \theta' = d\theta/d\tau \\ \psi = c/R \\ P = p/p_0 \\ p_0 = 2\omega\mu/\psi^2 \end{cases} \quad (2)$$

式中: λ 为量纲为 1 的轴向坐标; H 为量纲为 1 的油膜厚度; τ 为量纲为 1 的时间; ϵ 为轴承的偏心率; P 为量纲为 1 的油膜压力; ψ 为轴承的间隙比; c 为轴承的半径间隙。

将式(2)代入式(1), 有

$$H^3 \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - 3H^2 \epsilon \sin(\varphi) \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{D^2}{B^2} H^3 \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} - 3\epsilon \sin(\varphi) + 6\epsilon' \cos(\varphi) + 6\epsilon \theta' \sin(\varphi) \quad (3)$$

$$D = 2R \quad (4)$$

式中: D 为轴承直径。

x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动 x' 和 y' 分别为

$$\begin{cases} x' = \epsilon \theta' \cos(\theta) + \epsilon' \sin(\theta) \\ y' = \epsilon \theta' \sin(\theta) + \epsilon' \cos(\theta) \end{cases} \quad (5)$$

假设

$$P = P_p(\varphi, \lambda) + P_h(\varphi, \lambda) \quad (6)$$

$$P_p(\varphi, \lambda) = P_{p1}(\varphi) + P_{p2}(\lambda) \quad (7)$$

$$P_h(\varphi, \lambda) = P_{h1}(\varphi) P_{h2}(\lambda) \quad (8)$$

式中: $P_p(\varphi, \lambda)$ 为量纲为 1 的油膜压力特解; $P_h(\varphi, \lambda)$ 为量纲为 1 的油膜压力通解; $P_{p1}(\varphi)$ 为量纲为 1 的油膜压力特解的周向分离函数; $P_{p2}(\lambda)$ 为量纲为 1 的油膜压力特解的轴向分离函数; $P_{h1}(\varphi)$ 为量纲为 1 的油膜压力通解的周向分离函数; $P_{h2}(\lambda)$ 为量纲为 1 的油膜压力通解的轴向分离函数。

2.2 特解的求解

将式(7)代入式(3), 得

$$\frac{d^2 P_{p2}(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{B^2}{D^2} \left[-\frac{d^2 P_{p1}(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{3\epsilon \sin(\varphi)}{H} \frac{dP_{p1}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{3\epsilon \sin(\varphi) + 6\epsilon' \cos(\varphi) + 6\epsilon \theta' \sin(\varphi)}{H^3} \right] \quad (9)$$

式(9)左右两边分别是 λ 和 φ 的函数, 因此, 当其左右两边都为常数时方程可行, 即有

$$\frac{d^2 P_{p2}(\lambda)}{d\lambda^2} = C_1 \quad (10)$$

$$\frac{B^2}{D^2} \left[-\frac{d^2 P_{p1}(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{3\epsilon \sin(\varphi)}{H} \frac{dP_{p1}(\varphi)}{d\varphi} - \frac{3\epsilon \sin(\varphi) + 6\epsilon' \cos(\varphi) + 6\epsilon \theta' \sin(\varphi)}{H^3} \right] = C_1 \quad (11)$$

式(10)解的形式可以表示为

$$P_{p2}(\lambda) = \frac{C_1}{2} \lambda^2 + C_2 \lambda + C_3 \quad (12)$$

式中: C_1 、 C_2 、 C_3 为油膜压力特解轴向分离函数表达式的系数。

取 $C_1 = 0$, 特解的轴向边界条件为

$$P_{p2}(\lambda) \big|_{\lambda=\pm 1} = 0 \quad (13)$$

得 C_2 、 C_3 为 0。

对于式(11), 设

$$\frac{dP_{p1}(\varphi)}{d\varphi} = \bar{P}_{p1}(\varphi) \quad (14)$$

将式(14)代入式(11), 有

$$\bar{P}_{p1}(\varphi) = \frac{C_4 + 6\epsilon' \sin(\varphi) + 3\epsilon \cos(\varphi) - 6\epsilon \theta' \cos(\varphi)}{[1 + \epsilon \cos(\varphi)]^3} \quad (15)$$

同时, 对式(14)积分, 有

$$P_{p1}(\varphi) = \int \bar{P}_{p1}(\varphi) d\varphi + C_5 \quad (16)$$

式中: C_4 、 C_5 为油膜压力特解周向分离函数表达式的系数。

结合式(11)、(14)~(16), 采用 Sommerfeld 变换得

$$\begin{cases} 1 + \epsilon \cos(\varphi) = \frac{1 - \epsilon^2}{1 - \epsilon \cos(\alpha)} \\ d\varphi = \frac{(1 - \epsilon^2)^{1/2} d\alpha}{1 - \epsilon \cos(\alpha)} \\ \sin(\alpha) = \frac{\sin(\varphi) (1 - \epsilon^2)^{1/2}}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \\ \cos(\alpha) = \frac{\epsilon + \cos(\varphi)}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \\ \alpha = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (17)$$

式中: α 为对应于 φ 的 Sommerfeld 变量。

量纲为 1 的油膜压力特解周向分离函数可表示为

$$P_{p1}(\varphi) = \frac{3\epsilon - 6\epsilon \theta'}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \left[\sin(\alpha) (1 + \epsilon^2) - \frac{\sin(2\alpha) \epsilon + 6\epsilon \alpha}{4} \right] + C_4 \frac{4\alpha - 8\epsilon \sin(\alpha) + \epsilon^2 \sin(2\alpha) + 2\epsilon^2 \alpha}{4(1 - \epsilon^2)^{5/2}} + \frac{3\epsilon'}{\epsilon [1 + \epsilon \cos(\varphi)]^2} + C_5 \quad (18)$$

利用轴承周向边界条件计算油膜压力特解周向分离函数表达式的系数 C_4 、 C_5 , 轴承油膜起始边的周向边界条件为

$$P_{p1}(\varphi)|_{\varphi=0} = 0 \quad (19)$$

轴承油膜终止边的周向边界条件为

$$\begin{cases} P_{p1}(\varphi)|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \\ \left. \frac{\partial P_{p1}(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\left\{ \left[\sin(\alpha_c)(4\epsilon^2 + 4 - 2\cos(\alpha_c)\epsilon) - 6\epsilon\alpha_c \right] \frac{6\epsilon\theta' - 3\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} + \frac{12\epsilon'}{\epsilon(1 + \epsilon)^2} - \frac{12\epsilon'}{\epsilon[1 + \epsilon\cos(\varphi_c)]^2} \right\} (1 - \epsilon^2)^{5/2} \cdot \left[4\alpha_c - 8\epsilon\sin(\alpha_c) + \epsilon^2\sin(2\alpha_c) + 2\epsilon^2\alpha_c \right]^{-1} = C_4 \quad (23)$$

式中: α_c 为对应于油膜终止位置角 φ_c 的 Sommerfeld 变量。

结合式(21)、(23),采用牛顿迭代法和 Sommerfeld 变换求解油膜终止位置角 φ_c 及其对应的 Sommerfeld 变量 α_c ,进而可求得量纲为 1 的油膜

$$F_{pr} = - \int_{-1}^1 \int_0^{\varphi_c} P_{p1}(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi d\lambda = \frac{C_4}{\epsilon[1 + \epsilon\cos(\varphi_c)]^2} - \frac{C_4}{\epsilon(1 + \epsilon)^2} + 6\epsilon'(1 - \epsilon^2)^{-3/2} [\alpha_c - \sin(\alpha_c)\cos(\alpha_c)] + (6\epsilon - 12\epsilon\theta') \left\{ \frac{1 + 2\epsilon\cos(\varphi_c)}{2\epsilon^2[1 + \epsilon\cos(\varphi_c)]^2} - \frac{1 + 2\epsilon}{2\epsilon^2(1 + \epsilon)^2} \right\} \quad (24)$$

$$F_{pt} = - \int_{-1}^1 \int_0^{\varphi_c} P_{p1}(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi d\lambda = \frac{-2C_4}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \left[\epsilon^2\sin(\alpha_c) + \sin(\alpha_c) - \frac{\sin(2\alpha_c)}{4}\epsilon - \frac{3\epsilon\alpha_c}{2} \right] - 12\epsilon' \left\{ \frac{1 + 2\epsilon\cos(\varphi_c)}{2\epsilon^2[1 + \epsilon\cos(\varphi_c)]^2} - \frac{1 + 2\epsilon}{2\epsilon^2(1 + \epsilon)^2} \right\} + \frac{12\epsilon\theta' - 6\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \left[\frac{1}{4}\sin(2\alpha_c) + \frac{1}{2}\alpha_c - 2\epsilon\sin(\alpha_c) + \epsilon^2\alpha_c \right] \quad (25)$$

量纲为 1 的轴承特解油膜力沿 x 、 y 方向的分量 F_{px} 和 F_{py} 分别为

$$\begin{cases} F_{px} = F_{pt}\cos(\theta) + F_{pr}\sin(\theta) \\ F_{py} = -F_{pt}\sin(\theta) + F_{pr}\cos(\theta) \end{cases} \quad (26)$$

2.3 通解的求解

曲轴轴承量纲为 1 的通解压力分布满足如下方程

$$H \frac{\partial^2 P_h(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi^2} - \left[3\epsilon\sin(\varphi) \frac{\partial P_h(\varphi, \lambda)}{\partial \varphi} \right] + \left[\frac{D^2 H}{B^2} \frac{\partial^2 P_h(\varphi, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right] = 0 \quad (27)$$

将式(8)代入式(27),有

$$-\frac{P''_{h2}(\lambda)}{P_{h2}(\lambda)} = \frac{B^2}{D^2} \frac{P''_{h1}(\varphi)}{P_{h1}(\varphi)} - \frac{3B^2\epsilon\sin(\varphi)}{D^2 H} \frac{P'_{h1}(\varphi)}{P_{h1}(\varphi)} \quad (28)$$

式(28)两边分别是 λ 和 φ 的函数,因此,当其两边都为常数时方程可行,因此,令式(28)两边均等于常数 κ ,即

$$-\frac{P''_{h2}(\lambda)}{P_{h2}(\lambda)} = \kappa \quad (29)$$

$$\frac{B^2}{D^2} \frac{P''_{h1}(\varphi)}{P_{h1}(\varphi)} - \frac{3}{D^2} \frac{B^2}{H} \epsilon\sin(\varphi) \frac{P'_{h1}(\varphi)}{P_{h1}(\varphi)} = \kappa \quad (30)$$

从式(29)、(30)可以看出:量纲为 1 的通解轴向压力分布和周向压力分布通过常数 κ 相互耦合,因此,量纲为 1 的通解轴向压力分布函数的求解需根据常数 κ 的取值进行讨论。 κ 的取值有等于 0、大于 0、小于 0 三种情况,结合边界条件可知 κ 等于 0、大

式中: φ_c 为轴承油膜的终止位置角。

将式(19)、(20)代入式(18),得

$$C_4 = -6\epsilon'\sin(\varphi_c) - 3\epsilon\cos(\varphi_c) + 6\epsilon\theta'\cos(\varphi_c) \quad (21)$$

$$C_5 = -\frac{3\epsilon'}{\epsilon(1 + \epsilon)^2} \quad (22)$$

压力特解的周向分离函数表达式 $P_{p1}(\varphi)$ 。对量纲为 1 的油膜压力特解的周向分离函数进行积分,可求得量纲为 1 的径向特解油膜力 F_{pr} 和量纲为 1 的切向特解油膜力 F_{pt} 分别为

于 0 时,式(29)无解,不符合要求,因此,取 $\kappa < 0$,并假设 $\kappa = -a^2$,其中, a 为任意非零的常数。那么,式(29)解的形式可以表示为

$$P_{h2}(\lambda) = C_6 e^{a\lambda} + C_7 e^{-a\lambda} \quad (31)$$

式中: C_6 、 C_7 为油膜压力通解轴向分离函数表达式的系数。

在轴承的两端处,有

$$P_p(\varphi, \pm 1) = P_{p1}(\varphi) + P_{p2}(\pm 1) = -P_h(\varphi, \pm 1) = -P_{h1}(\varphi)P_{h2}(\pm 1) \quad (32)$$

则量纲为 1 的通解的轴向边界条件可表示为

$$P_{h2}(\lambda)|_{\lambda=\pm 1} = 1 \quad (33)$$

将式(33)代入式(31),有

$$C_6 = C_7 = \frac{e^a}{1 + e^{2a}} \quad (34)$$

则量纲为 1 的通解轴向压力分布可表示为

$$P_{h2}(\lambda) = \frac{e^a}{1 + e^{2a}} (e^{a\lambda} + e^{-a\lambda}) \quad (35)$$

由于通解周向压力没有直接解的形式,因此,对式(30)采用如下变换

$$\begin{cases} H_h = C_8 \varphi \\ P_{h1}(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{H_h} \\ H_h^2 = H^3 \end{cases} \quad (36)$$

式中: H_h 为油膜厚度的逼近函数; C_8 为逼近函数的系数; $f(\varphi)$ 为通解周向压力分布的变换函数。

式(30)可写为 Sturm-Liouville 型方程形式,即

$$f''(\varphi) - \kappa \left(\frac{D}{B}\right)^2 f(\varphi) = 0 \quad (37)$$

此外,通解的周向边界条件可表示为

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(\varphi_c) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

式(37)、(38)共同构成了 Sturm-Liouville 本征值问题,式(37)可以表示为

$$[s(\varphi)f'(\varphi)]' - q(\varphi)f(\varphi) - \frac{\kappa D^2}{B^2} \rho(\varphi)f(\varphi) = 0 \quad (39)$$

式中: $s(\varphi)$ 、 $q(\varphi)$ 、 $\rho(\varphi)$ 分别为 Sturm-Liouville 方程的系数函数、势函数和权重函数,且有 $s(\varphi)=1$, $q(\varphi)=0$, $\rho(\varphi)=1$ 。

对于式(39),可直接得到其本征值和本征函数分别为

$$k_i = \frac{i\pi B}{D\varphi_c} \quad (40)$$

$$f_i(\varphi) = \sin(k_i \frac{D}{B} \varphi) = \sin\left(\frac{i\pi\varphi}{\varphi_c}\right) \quad (41)$$

式中: k_i 为第 i 个本征值; $f_i(\varphi)$ 为通解周向压力分布变换函数 $f(\varphi)$ 的第 i 个本征函数。

根据本征函数的正交性,有

$$\eta_i = \frac{1}{\int_0^{\varphi_c} \rho(\varphi) f_i^2(\varphi) d\varphi} \quad (42)$$

式中: η_i 为第 i 个本征函数的特征值。

结合油膜压力通解的轴向分布函数表达式,量纲为 1 的通解压力分布可表示为

$$P_h(\varphi, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i f_i(\varphi) P_{h2i}(\lambda) \quad (43)$$

$$F_r = F_{pr} + F_{hr} = \frac{C_4}{\epsilon [1 + \epsilon \cos(\varphi_c)]^2} - \frac{C_4}{\epsilon (1 + \epsilon)^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2\sigma_i \varphi_c \tanh(k_i) [i\pi \cos(i\pi) \cos(\varphi_c) + \varphi_c \sin(i\pi) \sin(\varphi_c) - i\pi]}{[(i\pi)^2 - \varphi_c^2] k_i} + (6\epsilon - 12\epsilon') \left\{ \frac{1 + 2\epsilon \cos(\varphi_c)}{2\epsilon^2 [1 + \epsilon \cos(\varphi_c)]^2} - \frac{1 + 2\epsilon}{2\epsilon^2 (1 + \epsilon)^2} \right\} + 6\epsilon' (1 - \epsilon^2)^{-3/2} [a_c - \sin(a_c) \cos(a_c)] \quad (49)$$

$$F_t = F_{pt} + F_{ht} = \frac{-2C_4}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \left[\epsilon^2 \sin(a_c) + \sin(a_c) - \frac{\sin(2a_c)}{4} \epsilon - \frac{3\epsilon a_c}{2} \right] - 12\epsilon' \left\{ \frac{1 + 2\epsilon \cos(\varphi_c)}{2\epsilon^2 [1 + \epsilon \cos(\varphi_c)]^2} - \frac{1 + 2\epsilon}{2\epsilon^2 (1 + \epsilon)^2} \right\} + \frac{12\epsilon' - 6\epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{5/2}} \left[\frac{1}{4} \sin(2a_c) + \frac{1}{2} a_c - 2\epsilon \sin(a_c) + \epsilon^2 a_c \right] - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-2\sigma_i \varphi_c \tanh(k_i) [i\pi \cos(i\pi) \sin(\varphi_c) - \varphi_c \sin(i\pi) \cos(\varphi_c)]}{[(i\pi)^2 - \varphi_c^2] k_i} \quad (50)$$

量纲为 1 的轴承油膜力沿 x 、 y 方向的分量 F_x

和 F_y 分别为

$$\begin{cases} F_x = F_t \cos(\theta) + F_r \sin(\theta) \\ F_y = -F_t \sin(\theta) + F_r \cos(\theta) \end{cases} \quad (51)$$

量纲为 1 的轴承非线性油膜力可以表示为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (52)$$

$$\sigma_i = \eta_i \int_0^{\varphi_c} -\rho(\varphi) P_{p1}(\varphi) f_i(\varphi) d\varphi \quad (44)$$

$$P_{h2i}(\lambda) = \frac{e^{k_i}}{1 + e^{2k_i}} (e^{k_i \lambda} + e^{-k_i \lambda}) \quad (45)$$

式中: $P_{h2i}(\lambda)$ 为油膜压力通解轴向分布的固有函数; σ_i 为固有函数的展开系数。

通过对量纲为 1 的油膜压力通解 $P_h(\varphi, \lambda)$ 积分,可得量纲为 1 的径向通解油膜力 F_{hr} 和量纲为 1 的切向通解油膜力 F_{ht} 分别为

$$F_{hr} = - \int_{-1}^1 \int_0^{\varphi_c} P_h(\varphi, \lambda) \cos(\varphi) d\varphi d\lambda = - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \left\{ -\varphi_c \frac{2 \tanh(k_i)}{k_i} \left[i\pi \cos(i\pi) \cos(\varphi_c) + \varphi_c \sin(i\pi) \sin(\varphi_c) - i\pi \right] \frac{1}{(i\pi)^2 - \varphi_c^2} \right\} \quad (46)$$

$$F_{ht} = - \int_{-1}^1 \int_0^{\varphi_c} P_h(\varphi, \lambda) \sin(\varphi) d\varphi d\lambda = - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \left\{ -\varphi_c \frac{2 \tanh(k_i)}{k_i} \left[i\pi \cos(i\pi) \sin(\varphi_c) - \varphi_c \sin(i\pi) \cos(\varphi_c) \right] \frac{1}{(i\pi)^2 - \varphi_c^2} \right\} \quad (47)$$

量纲为 1 的轴承通解油膜力沿 x 、 y 方向的分量 F_{hx} 和 F_{hy} 分别为

$$\begin{cases} F_{hx} = F_{ht} \cos(\theta) + F_{hr} \sin(\theta) \\ F_{hy} = -F_{ht} \sin(\theta) + F_{hr} \cos(\theta) \end{cases} \quad (48)$$

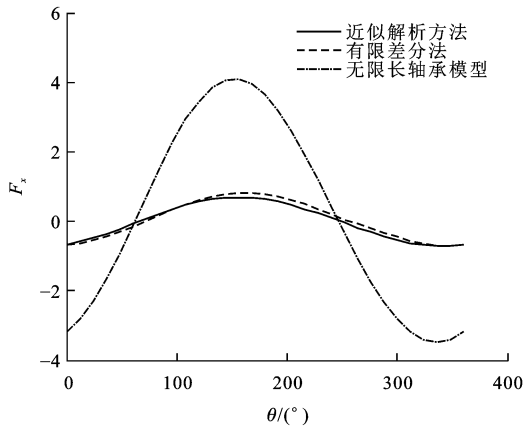
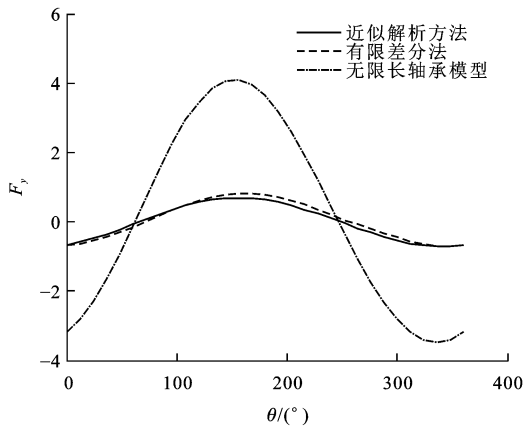
2.4 非线性油膜力

将量纲为 1 的轴承特解和通解油膜力分别沿切向和径向叠加,可求得量纲为 1 的轴承切向油膜力 F_t 和径向油膜力 F_r 分别为

3 数值算例分析

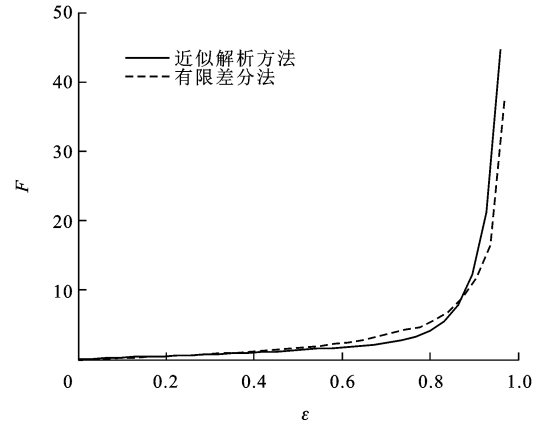
3.1 方法验证

当轴承宽径比为 1,偏心率为 0.3, x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01,本征值个数为 30 时,图 3、4 分别给出了采用解析方法计算得到的 x 、 y 方向量纲为 1 的非线性油膜力与有限差分法和无限

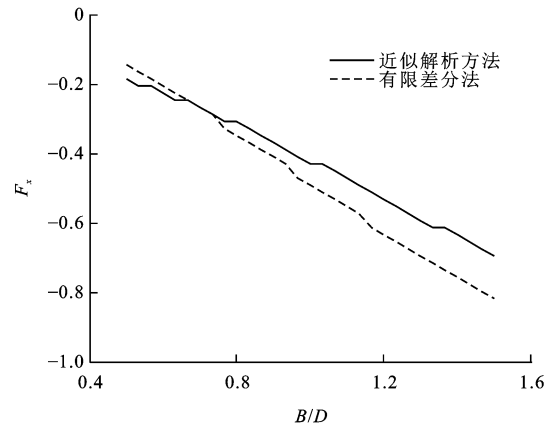
图3 F_x 和 θ 关系曲线对比Fig. 3 Comparison of relationship curves of F_x and θ 图4 F_y 和 θ 关系曲线对比Fig. 4 Comparison of relationship curves of F_y and θ

长轴承模型计算结果的比较,可以看出:解析方法计算得到的 x 、 y 方向量纲为 1 的非线性油膜力随着轴承偏位角的增加呈现出先增大后减少的趋势,与有限差分法的计算结果较一致;采用无限长轴承模型的计算结果与有限差分法的计算结果相差约 4 倍,其原因在于无限长轴承模型忽略了油膜力沿轴向的分布。这表明相比于无限长轴承模型而言,本文提出的解析方法具有较高的准确性。

当轴承宽径比为 1,偏心率为 0.3, x 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01, y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0,本征值个数为 30,偏位角为 90° 时,图 5 给出了不同轴承偏心率条件下采用解析方法和有限差分法计算得到的非线性油膜力,可以看出:随着偏心率的增大,轴承的非线性油膜力逐渐增大,且偏心率大于 0.8 时的油膜力增加速率较大;当轴承偏心率较小(不大于 0.5)时,采用解析方法和有限差分法计算得到的轴承非线性油膜力相差约 5%。由于曲轴轴承一般工作在小偏心状态,因此,采用解析方法能够对曲轴轴承工作状态下的非线性油膜力进行准确求解。

图5 F 和 ϵ 关系曲线对比Fig. 5 Comparison of relationship curves of F and ϵ

当轴承偏心率为 0.3, x 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01, y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0,本征值个数为 30,偏位角为 30° 时,图 6、7 分别给出了不同宽径比时采用解析方法与有限差分法计算得到的 x 、 y 方向量纲为 1 的非线性油膜力,可以看出:随着轴承宽径比的增大, x 方向量纲为 1 的非线性油膜力单调减小, y 方向量纲为 1 的非线性油膜力单调增大;采用解析方法计算的非线性油膜力与有限差分法的计算结果较一致,尤其是宽径比较小时。

图6 F_x 和 B/D 关系曲线对比Fig. 6 Comparison of relationship curves of F_x and B/D

3.2 破裂边数值算例分析

图 8 给出了宽径比为 1, x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01,偏心率分别为 0.2、0.4、0.6 时,油膜终止位置角随偏位角的变化曲线,可以看出:油膜终止位置角随着偏心率的增大而减小,即油膜在大偏心状态下易破裂;当轴承偏心率由 0.2 增大到 0.6 时,油膜终止位置角的最大值由 252° 减小到 218° ,减小了 13.5%;当偏心率较大(等于 0.6)时,随着偏位角的增加,油膜终止位置角的波动较小,始终保持在 215° 附近。

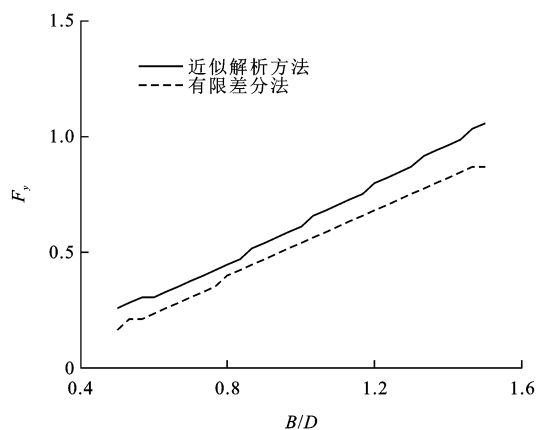
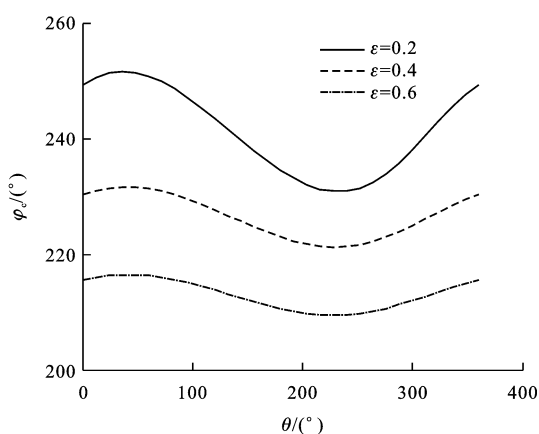
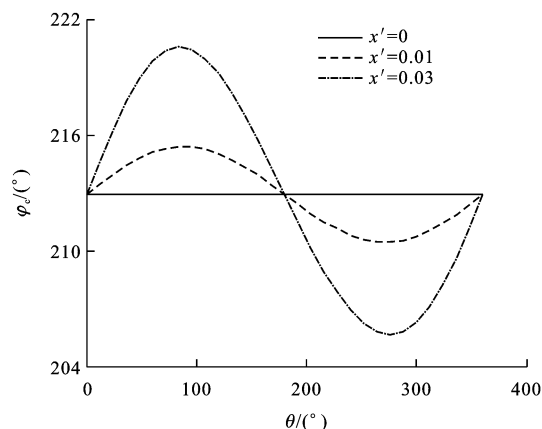
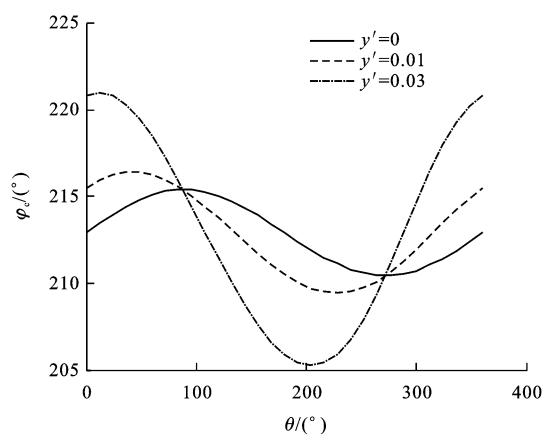
图 7 F_y 和 B/D 关系曲线对比Fig. 7 Comparison of relationship curves of F_y and B/D 图 8 不同 ϵ 时 φ_c 和 θ 的关系曲线Fig. 8 Relationship curves of φ_c and θ for various ϵ

图 9 给出了宽径比为 1, 偏心率为 0.6, y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0, x 方向量纲为 1 的速度扰动分别为 0、0.01、0.03 时, 油膜终止位置角随偏位角的变化曲线, 可以看出: 当 x 方向量纲为 1 的速度扰动为 0 时, 油膜终止位置角随偏位角的变化保持不变, 这表明当 x 方向的速度扰动为 0 时, 油膜终止位置角受轴承偏位角的影响较小; 当 x 方向速度扰动非零时, 随着速度扰动的增大, 油膜终止位置角波动较大; 当 x 方向量纲为 1 的速度扰动由 0 增大到 0.03 时, 油膜终止位置角的最大值由 213° 增加到 220° , 变化量约为 3.3%。

图 10 给出了宽径比为 1, 偏心率为 0.6, x 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01, y 方向量纲为 1 的速度扰动分别为 0、0.01、0.03 时, 油膜终止位置角随偏位角的变化曲线, 可以看出: 随着 y 方向量纲为 1 的速度扰动的增大, 油膜终止位置角随偏位角的变化率逐渐增大; 当 y 方向量纲为 1 的速度扰动较小, 偏位角在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 和 $270^\circ \sim 360^\circ$ 时, 油膜终止位置角较小, 即较小的 y 方向速度扰动易导致油膜破裂;

图 9 不同 x' 时 φ_c 和 θ 的关系曲线Fig. 9 Relationship curves of φ_c and θ for various x' 图 10 不同 y' 时 φ_c 和 θ 的关系曲线Fig. 10 Relationship curves of φ_c and θ for various y'

当 y 方向量纲为 1 的速度扰动由 0 增大到 0.03 时, 油膜终止位置角的最大变化量约为 3.3%。

3.3 特解数值算例分析

图 11 给出了轴承偏心率为 0.6, x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01, 偏位角为 30° 时, Reynolds 边界条件下量纲为 1 的油膜压力特解, 可以看出: 量纲为 1 的油膜压力特解为轴承周向坐标的函数, 随着轴承周向坐标的增大, 量纲为 1 的油膜压力特解先增大后减小; 在轴承轴线方向, 量纲为 1 的油膜压力特解始终保持不变, 原因在于求解量纲为 1 的油膜压力特解时忽略了油膜压力沿轴向的分布。

当轴承偏心率为 0.5, x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01 时, 图 12、13 分别给出 x 、 y 方向量纲为 1 的特解油膜力随偏位角的变化曲线, 可以看出: x 、 y 方向量纲为 1 的特解油膜力总体上呈现出相同的变化趋势, 即随着轴承偏位角的增加, x 、 y 方向量纲为 1 的特解油膜力均表现出先增大后减小再增大的趋势; 当偏位角分别为 150° 、 325° 时, x 方向量纲为 1 的特解油膜力分别取得最大值 6.8 和最小值

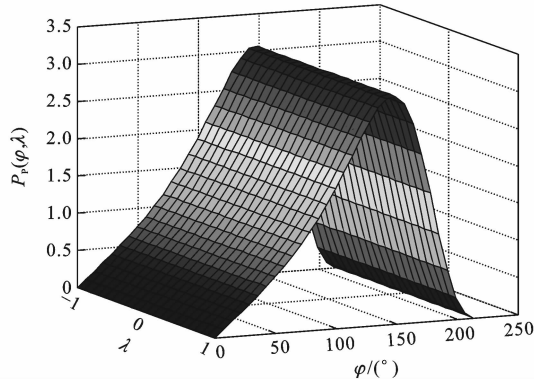
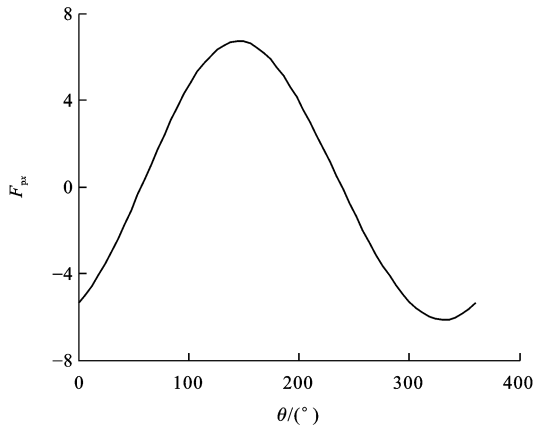
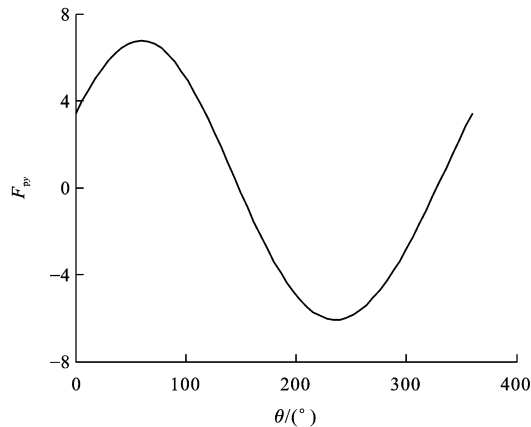


图 11 特解油膜压力分布

Fig. 11 Oil film pressure distribution of particular solution

图 12 F_{px} 和 θ 的关系曲线Fig. 12 Relationship curve of F_{px} and θ 图 13 F_{py} 和 θ 的关系曲线Fig. 13 Relationship curve of F_{py} and θ

—6.0;当偏位角分别为 60° 、 240° 时, y 方向量纲为 1 的特解油膜力分别取得最大值 6.8 和最小值 -6.0。

3.4 通解数值算例分析

图 14 给出了宽径比为 1.2, 偏心率为 0.6, 偏位角为 30° , x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01, 本征值个数为 30 时, 量纲为 1 的油膜压力通解, 可以看出: 量纲为 1 的油膜压力通解沿轴承周向先减小

后增大;在轴承轴线方向上, 量纲为 1 的油膜压力通解呈现出先增大后减小的趋势;由于轴承的端泄效应, 使得轴承轴向两端处量纲为 1 的通解油膜压力较小。

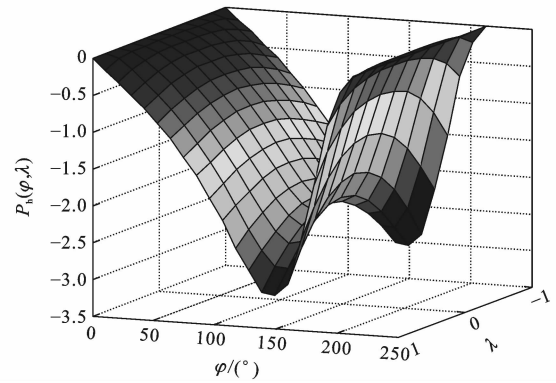
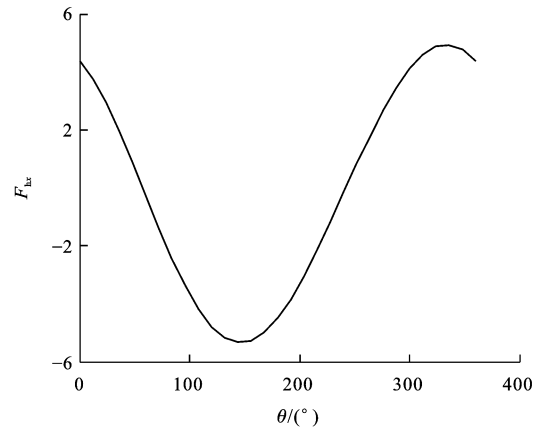


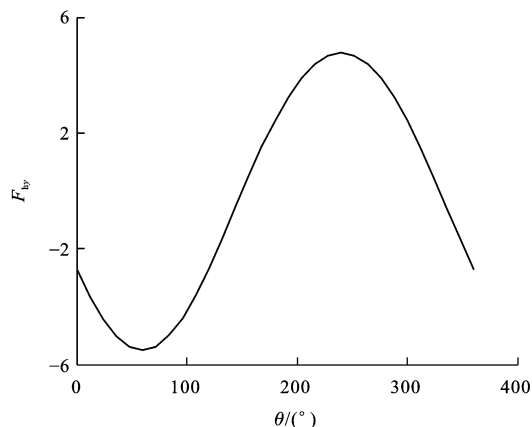
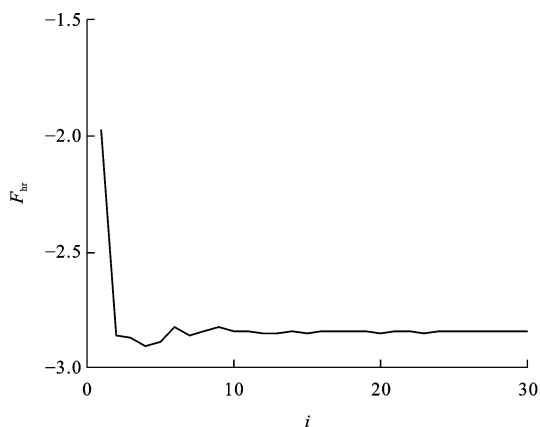
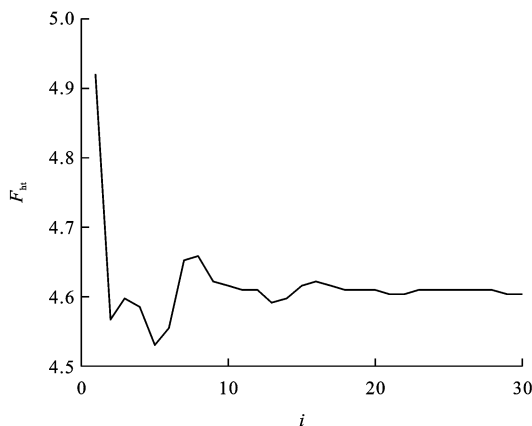
图 14 通解油膜压力分布

Fig. 14 Oil film pressure distribution of homogeneous solution

当宽径比为 1, 偏心率为 0.5, x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01 时, 图 15、16 分别给出了 x 、 y 方向量纲为 1 的通解油膜力随偏位角的变化曲线, 可以看出: x 、 y 方向量纲为 1 的通解油膜力总体上呈现出相同的变化趋势, 即随着偏位角的增加, x 、 y 方向量纲为 1 的通解油膜力均表现出先减小后增大再减小的趋势; 当偏位角分别为 150° 、 330° 时, x 方向量纲为 1 的通解油膜力分别取得最小值 -5.5 和最大值 5.0; 当偏位角分别为 60° 、 240° 时, y 方向量纲为 1 的通解油膜力分别取得最小值 -5.8 和最大值 4.8。

当宽径比为 1, 偏心率为 0.5, 偏位角为 30° , x 、 y 方向量纲为 1 的速度扰动为 0.01 时, 图 17、18 分别给出了量纲为 1 的径向通解油膜力和切向通解油膜力随本征值个数的变化曲线, 可以看出: 随着本征值个数的增加, 量纲为 1 的径向通解油膜力和切向通解油膜力逐渐收敛; 当本征值在 20 个以上的时

图 15 F_{hx} 和 θ 的关系曲线Fig. 15 Relationship curve of F_{hx} and θ

图 16 F_{hy} 和 θ 的关系曲线Fig. 16 Relationship curves of F_{hy} and θ 图 17 F_{hr} 和 i 的关系曲线Fig. 17 Relationship curve of F_{hr} and i 图 18 F_{ht} 和 i 的关系曲线Fig. 18 Relationship curve of F_{ht} and i

候,量纲为 1 的径向通解油膜力和切向通解油膜力虽有较小的波动,但其值基本稳定于 -2.8 和 4.6 附近,即本征值的个数不小于 20 时油膜通解的计算精度较高。

4 结 语

(1)基于分离变量法、Sturm-Liouville 理论与下

游 Reynolds 边界条件,提出了一种求解曲轴动压滑动轴承非线性油膜力的解析方法,通过与有限差分法计算的非线性油膜力比较,验证了本文解析方法的正确性。

(2)轴承偏心率 and 速度扰动对油膜终止位置角的影响较大;当轴承偏心率较大时,偏位角对油膜终止位置角的影响较小;当轴承偏心率较大时,油膜终止位置角越小,油膜越易破裂;当轴承速度扰动较大、偏位角较小时,油膜终止位置角较大,油膜越不易破裂。

(3)随着轴承偏位角的增大, x 、 y 方向上量纲为 1 的特解油膜力呈现先增大后减小再增大的趋势,但 x 、 y 方向量纲为 1 的通解油膜力表现出先减小后增大再减小的趋势。

(4)本征值的个数对油膜压力通解的计算精度有较大影响,当本征值的个数不小于 20 时,油膜压力通解的计算精度较高,能够满足工程需要。

参 考 文 献 :

References :

- [1] CUI Chang-lin, SUN Jun, HE Zhi-xian, et al. Systematical analysis method for the mechanical behaviors of crankshaft-bearing system[J]. Journal of Tribology, 2017, 139(2): 021702-1-9.
- [2] 刘 成,吕延军,李 莎,等.表面织构对曲轴轴承润滑性能的影响[J].交通运输工程学报,2017,17(3):65-74.
LIU Cheng, LU Yan-jun, LI Sha, et al. Effect of surface texture on tribological performance of crankshaft bearing[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2017, 17(3): 65-74. (in Chinese)
- [3] HE Zhen-peng, ZHANG Jun-hong, ZHANG Gui-chang, et al. Crankshaft-bearing evolution indexes investigation and asperity contact identification based on neural network[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(2): 506-523.
- [4] SUN Jun, SHU Lei, SONG Xian-hao, et al. Multi-objective optimization design of engine crankshaft bearing[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2016, 68(1): 86-91.
- [5] WANG Li-gang, CAO Deng-qing, HUANG Wen-hu. Nonlinear coupled dynamics of flexible blade-rotor-bearing systems[J]. Tribology International, 2010, 43(4): 759-778.
- [6] DE CASTRO H F, CAVALCA K L, NORDMANN R. Whirl and whip instabilities in rotor-bearing system considering a nonlinear force model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 317(1/2): 273-293.
- [7] XIE Wen-hui, TANG You-gang, CHEN Yu-shu. Analysis of motion stability of the flexible rotor-bearing system with two unbalanced disks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 310(1/2): 381-393.
- [8] JING Jian-ping, MENG Guang, SUN Yi, et al. On the non-

- linear dynamic behavior of a rotor-bearing system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 274(3-5): 1031-1044.
- [9] WANG Jun-guo, ZHOU Jian-zhong, DONG Da-wei, et al. Nonlinear dynamic analysis of a rub-impact rotor supported by oil film bearings[J]. Archive of Applied Mechanics, 2013, 83(3): 413-430.
- [10] LI De-xin, XU Jian-xue. A method to determine the periodic solution of the non-linear dynamics system[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275(1/2): 1-16.
- [11] CHANGJIAN Cai-wan. Non-linear dynamic analysis of dual flexible rotors supported by long journal bearings[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(6): 844-866.
- [12] XIAO Zhong-hui, WANG Li-ping, ZHENG Tie-sheng. An efficient algorithm for fluid force and its Jacobian matrix in journal bearing[J]. Journal of Tribology, 2006, 128(2): 291-295.
- [13] LU Y J, LIU H, DAI R, et al. A method for determining the periodic solution and its stability of non-linear bearing-rotor system based on observed states of the system[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2009, 223(2): 137-149.
- [14] HEI Di, LU Yan-jun, ZHANG Yong-fang, et al. Nonlinear dynamic behaviors of a rod fastening rotor supported by fixed-tilting pad journal bearings[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2014, 69: 129-150.
- [15] HIRANI H, ATHRE K, BISWAS S. Dynamically loaded finite length journal bearings: analytical method of solution[J]. Journal of Tribology, 1999, 121(4): 844-852.
- [16] MERUANE V, PASCUAL R. Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings[J]. Tribology International, 2008, 41(8): 743-754.
- [17] BASTANI Y, DE QUEIROZ M. A new analytic approximation for the hydrodynamic forces in finite-length journal bearings[J]. Journal of Tribology, 2010, 132(1): 014502-1-9.
- [18] WANG Y L, LIU Z S, KANG W J, et al. Approximate analytical model for fluid film force of finite length plain journal bearing[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2012, 226(5): 1345-1355.
- [19] VIGNOLO G G, BARILÁ D O, QUINZANI L M. Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings[J]. Tribology International, 2011, 44(10): 1089-1099.
- [20] CHASALEVRIS A. Finite length floating ring bearings: operational characteristics using analytical methods[J]. Tribology International, 2016, 94: 571-590.
- [21] SFYRIS D, CHASALEVRIS A. An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication[J]. Tribology International, 2012, 55: 46-58.
- [22] ZHANG Yong-fang, WU Peng, GUO Bo, et al. Approximate solution of oil film load-carrying capacity of turbulent journal bearing with couple stress flow[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(1): 106-114.
- [23] GONG Ru-zhi, LI De-you, WANG Hong-jie, et al. Analytical solution of Reynolds equation under dynamic conditions[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2016, 230(4): 416-427.
- [24] ZHANG Yong-fang, HEI Di, LIU Cheng, et al. An approximate solution of oil film forces of turbulent finite length journal bearing[J]. Tribology International, 2014, 74: 110-120.
- [25] 张永芳,刘成,李莎,等.基于混合遗传算法的径向滑动轴承表面织构优化[J].交通运输工程学报,2017,17(3):90-98. ZHANG Yong-fang, LIU Cheng, LI Sha, et al. Surface texture optimization of journal bearing based on hybrid genetic algorithm[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2017, 17(3): 90-98. (in Chinese)