

文章编号:1671-1637(2014)06-0051-08

高速列车齿轮传动系统谐振分析

黄冠华¹, 张卫华¹, 宋纾崎¹, 朱少成^{1,2}, 梁树林³, 王兴宇³

(1. 西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 四川 成都 610031; 2. 里昂国立应用科学学院 接触和结构力学实验室, 罗纳 里昂 69621; 3. 中国北车长春轨道客车股份有限公司, 吉林 长春 130062)

摘要:利用有限元方法得到高速列车齿轮传动系统时变啮合刚度,利用傅里叶级数模拟啮合刚度和传动误差,用多项式拟合齿侧间隙,建立考虑时变啮合刚度、传动误差与齿侧间隙等多种非线性因素的高速列车斜齿轮传动系统弯扭耦合动力学模型。结合非线性多尺度法,推导了高速列车齿轮传动系统谐波共振频率因子,利用数值积分法对齿轮传动系统动力学方程进行求解,得到了齿轮传动系统的频率响应曲线,分析了静态载荷、动态载荷与阻尼对系统谐振响应的影响。分析结果表明:齿轮传动系统中存在多种谐振频率因子,超谐共振会发生跳跃现象,谐波振动会引发系统倍频振动。当相对激励频率低于1.00时,系统波动剧烈。在列车实际运营中应制定合理的运营速度,以避免谐振的发生。

关键词:高速列车; 齿轮传动系统; 谐波共振; 多尺度法; 频率因子

中图分类号:U270.33 **文献标志码:**A

Harmonic resonance analysis of gear transmission system for high-speed train

HUANG Guan-hua¹, ZHANG Wei-hua¹, SONG Shu-qi¹, ZHU Shao-cheng^{1,2},
LIANG Shu-lin³, WANG Xing-yu³

(1. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China;
2. Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,
Lyon 69621, Rhône, France; 3. CNR Changchun Railway Passenger Vehicle Company Limited,
Changchun 130062, Jilin, China)

Abstract: The time-varying mesh stiffness of gear transmission system for high-speed train was calculated by using finite element method, the mesh stiffness and the transmission error were expressed by using Fourier series, the tooth backlash was fitted by using polynomial expression, and a bending-torsion coupling dynamics model of cylindrical helical gear transmission system was developed based on considering some nonlinear factors such as the time-varying mesh stiffness, the transmission error, the tooth backlash, etc. The nonlinear method of multiple scales was used to derive the harmonic resonance frequency factors of gear transmission system. The frequency response curves of gear transmission system were obtained by using numerical integration method to solve the dynamics equations of gear transmission system. The influences of static loads, dynamic loads and dampings on the harmonic resonance responses of gear transmission system were analyzed. Analysis result indicates that there are many harmonic resonance frequency factors in gear transmission system. A jumping phenomenon is found in the

收稿日期:2014-07-21

基金项目:国家自然科学基金项目(U1234208);中国铁路总公司科技研究开发计划课题(2013J008-A)

作者简介:黄冠华(1987-),男,江西吉安人,西南交通大学工学博士研究生,从事高速列车传动系统动力学研究。

导师简介:张卫华(1961-),男,江苏宜兴人,西南交通大学教授,工学博士。

super-harmonic resonance response of gear transmission system. The double frequency vibrations are found under the harmonic excitations. The gear system has intense vibration when the meshing frequency is lower than the natural frequency. The reasonable operating speed of train should be set to avoid the harmonic resonances. 10 figs, 20 refs.

Key words: high-speed train; gear transmission system; harmonic resonance; method of multiple scales; frequency factors

Author resumes: HUANG Guan-hua(1987-), male, doctoral student, +86-28-87634057, hgh7735@126.com; ZHANG Wei-hua(1961-), male, professor, PhD, +86-28-87601068, tpl@swjtu.edu.cn.

0 引言

高速列车齿轮传动系统主要由大小齿轮、箱体和联轴节构成,其中,小齿轮通过联轴节与牵引电机相连,大齿轮直接压装在轮轴上,齿轮箱的一端通过抱轴承悬挂在车轴上,另一端通过吊杆吊挂在构架横梁上,其性能的优劣直接影响高速列车的动力传输和转向架的走行安全。在齿轮传动中,由于啮合过程中参与啮合的轮齿对数的周期变化,使得轮齿的综合啮合刚度周期变化,在动力学模型中体现为周期性时变的弹性刚度。同时,在齿轮的设计制造过程中,不可避免地存在齿侧间隙,具有时变啮合刚度和齿侧间隙的齿轮系统将表现出强烈的非线性^[1-4],如亚谐和超谐响应、极限环共存和混沌现象等。国内外学者在这方面也展开了多方面的研究,Kahraman等针对单自由度的直齿传动系统,考虑了齿轮的时变刚度、传动误差和齿侧间隙,利用谐波平衡法研究了系统的非线性特性^[5-8];Benton等利用数值方法分析了单自由度齿轮系统的稳定性和稳态响应,揭示了齿轮系统的谐波共振、概周期响应和混沌响应^[9-10];Raghothama等利用积分算法对多自由度的齿轮系统的稳定性进行了研究,探讨了通向混沌的倍周期分岔途径^[11-12];Blankenship等利用试验验证了齿轮副中超谐响应和极限环共存的现象^[13-15]。这些研究大多关注的是齿轮系统自身,高速列车齿轮传动系统在实际运营中不但受到时变啮合刚度和齿侧间隙的影响,而且受复杂的外界激励影响,因此,在传动系统的服役中,动态响应应具有明显的非线性特征,极易引发各种非线性共振^[16],而目前关于这方面的研究尚少。本文针对某型高速列车齿轮传动系统,建立考虑时变动态刚度、传递误差与齿侧间隙等多种非线性因素的斜齿轮传动系统动力学模型,将动态刚度与传动误差进行傅里叶展开,利用多项式对齿侧间隙进行拟合,运用非线性多尺度解析方法分析了系

统的亚谐与超谐共振频率因子,研究了其对系统共振的影响,结合数值分析方法,得到了相应的非线性动态响应。

1 齿轮传动系统动力学模型

1.1 动力学方程

高速列车齿轮传动系统通常采用斜齿轮传动方式,在斜齿轮传动中,除了扭转振动外,由于轮齿的啮合会产生轴向的动态啮合力,引起轴向振动,因此,斜齿轮传动系统是一个复杂的弯扭耦合振动^[17-18]。据此,本文建立的斜齿轮传动系统的动力学模型见图1。这是一个三维空间的振动系统,整个齿轮系统共6个自由度,包含沿 y 方向的切向运动、 z 方向的轴向运动以及绕 z 轴旋转的扭转运动。图1中: β 为齿轮的螺旋角; m_p 、 m_g 分别为主、被动齿轮的质量; I_p 、 I_g 分别为主、被动齿轮的转动惯量; R_p 、 R_g 分别为主、被动齿轮的基圆半径; k_{py} 、 k_{gy} 、 k_{pz} 、 k_{gz} 分别为主、被动齿轮切向和轴向的支承刚度; c_{py} 、 c_{gy} 、 c_{pz} 、 c_{gz} 分别为主、被动齿轮切向和轴向的支承阻尼; T_p 、 T_g 分别为作用在主、被动齿轮上的外载荷力矩; O_p 、 O_g 分别为主、被动齿轮的质心; Q 、 G 分别为主、被动齿轮的啮合点。

在图1中,设广义的位移向量为

$$\delta_1 = (y_p, z_p, \theta_p, y_g, z_g, \theta_g)^T \quad (1)$$

式中: y_p 、 y_g 、 z_p 、 z_g 、 θ_p 、 θ_g 分别为主、被动齿轮的切向位移、轴向位移与扭转角。

啮合点切向振动位移 y 和轴向振动位移 z 的关系为

$$z = y \tan(\beta) \quad (2)$$

啮合点 Q 的切向位移 y_Q 和轴向位移 z_Q 与主动齿轮广义坐标位移之间的关系为

$$\begin{cases} y_Q = y_p + \theta_p R_p \\ z_Q = z_p - y_Q \tan(\beta) = z_p - (y_p + \theta_p R_p) \tan(\beta) \end{cases} \quad (3)$$

啮合点 G 的切向位移 y_G 和轴向位移 z_G 与被

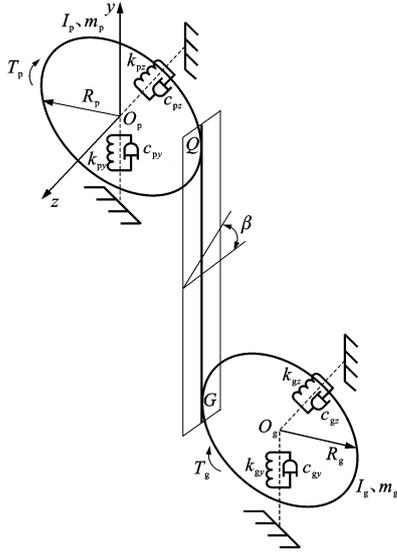


图 1 斜齿轮传动系统动力学模型

Fig. 1 Dynamics model of helical gear transmission system

动齿轮广义坐标位移之间的关系为

$$\begin{cases} y_G = y_p - \theta_g R_g \\ z_G = z_g - y_G \tan(\beta) = z_g - (y_p - \theta_g R_g) \tan(\beta) \end{cases} \quad (4)$$

设齿轮啮合的法向刚度为 k_n ，法向阻尼为 c_n ，法向啮合误差为 e_n ，分解后的轴向刚度为 k_{nz} ，切向刚度为 k_{ny} ，轴向阻尼为 c_{nz} ，切向阻尼为 c_{ny} ，轴向啮合误差为 e_{nz} ，切向啮合误差为 e_{ny} ，分别表示为

$$\begin{cases} k_{nz} = k_n \sin(\beta) \\ k_{ny} = k_n \cos(\beta) \\ c_{nz} = c_n \sin(\beta) \\ c_{ny} = c_n \cos(\beta) \\ e_{nz} = e_n \sin(\beta) \\ e_{ny} = e_n \cos(\beta) \end{cases} \quad (5)$$

由牛顿第二定律可得系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} f_y(y_p) = -F_y \\ m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} f_y(y_g) = F_y \\ m_p \ddot{z}_p + c_{pz} \dot{z}_p + k_{pz} f_z(z_p) = F_z \\ m_g \ddot{z}_g + c_{gz} \dot{z}_g + k_{gz} f_z(z_g) = -F_z \\ I_p \ddot{\theta}_p = -T_p - F_y R_p \\ I_g \ddot{\theta}_g = -T_g - F_y R_g \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_y = & k_{ny} f_y(y_Q - y_G - e_{ny}) + c_{ny} (\dot{y}_Q - \dot{y}_G - \dot{e}_{ny}) = \\ & \cos(\beta) \left[k_n f_y(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e_{ny}) + \right. \\ & \left. c_n (\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e}_{ny}) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F_z = & k_{nz} f_z(z_Q - z_G - e_{nz}) + c_{nz} (\dot{z}_Q - \dot{z}_G - \dot{e}_{nz}) = \\ & \sin(\beta) \left\{ k_n f_z \left[(z_p - (y_p + R_p \theta_p) \tan(\beta)) - z_g + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. (y_g - \theta_g R_g) \tan(\beta) - e_{nz} \right] + c_n \left[\dot{z}_p - (\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p) \tan(\beta) - \dot{z}_g + (\dot{y}_g - \dot{\theta}_g R_g) \tan(\beta) - \dot{e}_{nz} \right] \right\} \quad (8)$$

式中： $f_y(\cdot)$ 和 $f_z(\cdot)$ 分别为切向和轴向的齿侧间隙函数； F_y 、 F_z 分别为切向和轴向的动态啮合力。

1.2 系统激励

齿轮传动系统的动态激励分为内部激励和外部激励，外部激励主要指输入转矩和负载转矩，内部激励包括时变啮合刚度激励和传递误差激励等。轮齿综合啮合刚度定义为使一对或几对同时啮合的轮齿在 1 mm 齿宽上产生 1 μm 挠度所需的载荷^[19]。针对这一定义，利用有限元法可以得到齿轮的啮合刚度，建立高速列车轮齿三维实体接触有限元模型（图 2），计算出随时间变化的啮合轮齿之间弹性变形和受力，从而得到齿轮啮合刚度，然后采用傅里叶级数对时变刚度进行拟合，拟合结果见图 3。啮合刚度为

$$k_n = K_s + \sum_{j=1}^{\infty} K_j \cos(j\omega_1 t + \varphi_j) \quad (9)$$

$$\omega_1 = 2\pi Z_p n_p / 60 = 2\pi Z_g n_g / 60 \quad (10)$$

式中： K_s 为平均刚度； j 为采用傅里叶级数拟合时的谐波项数； K_j 为刚度波动幅值； φ_j 为相位角； ω_1 为齿轮副的啮合圆周频率； Z_p 、 Z_g 分别为主、被动齿轮的齿数； n_p 、 n_g 分别为主、被动齿轮的转速； t 为时间。

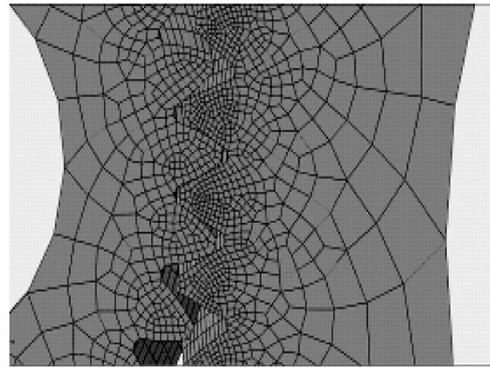


图 2 轮齿接触有限元模型

Fig. 2 Contacting finite element model of gear pair

轮齿啮合误差是由齿轮加工误差和安装误差引起的，在设计阶段只有精度要求，无具体的误差数值，通常采用齿轮啮合频率的傅里叶级数表示，据此得到齿轮的误差曲线的模拟结果见图 4。啮合误差 e 为

$$e = e_0 + \sum_{j=1}^{\infty} e_j \sin(j\omega_1 t + \varphi_j) \quad (11)$$

式中： e_0 、 e_j 分别为齿轮啮合误差的常数和幅值。

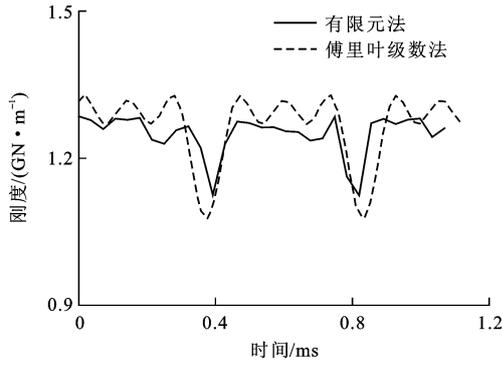


图 3 啮合刚度曲线

Fig. 3 Mesh stiffness curves

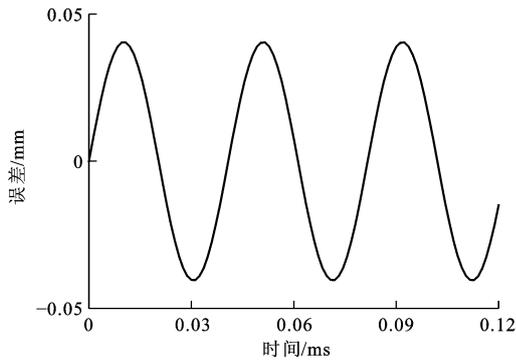


图 4 误差曲线

Fig. 4 Error curve

齿侧间隙函数可用分段函数表达, 设 l 为齿侧间隙, 齿侧间隙函数 $f_0(l)$ 为

$$f_0(l) = \begin{cases} l - b_1 & l > b_1 \\ 0 & -b_1 \leq l \leq b_1 \\ l + b_1 & l < -b_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中: b_1 为刚度转折点的相对位移。

将间隙函数看成是对称形式, 通常可用多项式对齿侧间隙函数进行拟合, 按三次多项式拟合的效果见图 5, 拟合参数 a_1 与 a_2 分别取 0.167 与 0.064。三次多项式拟合函数 $f_1(l)$ 为

$$f_1(l) = a_1 l + a_2 l^3 \quad (13)$$

1.3 运动方程的归一化

设齿间扭转相对位移 y_r 与量纲为 1 的时间 τ 分别为

$$y_r = \theta_p R_p + \theta_g R_g - e_{ny}$$

$$\tau = \omega_2 t$$

$$\omega_2 = \sqrt{K_s/m_e}$$

$$m_e = \frac{I_g I_p}{I_g R_p^2 + I_p R_g^2}$$

式中: ω_2 为齿轮固有频率; m_e 为齿轮等效质量。

将刚度表达式(9)和误差表达式(11)代入动力

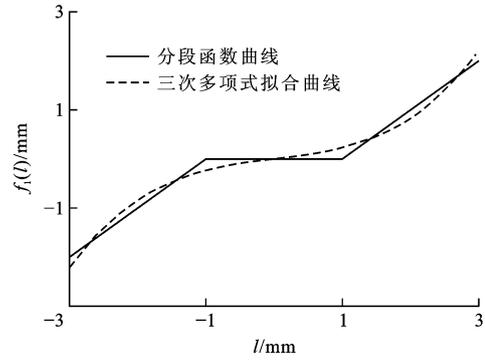


图 5 齿侧间隙函数曲线

Fig. 5 Curves of tooth backlash function

学方程式(6)中, 将式(6)最后 2 个方程合并为扭转相对运动方程, 引入标定尺度 b_0 , 对动力学方程式(6)进行归一化, 得到归一化后的动力学方程为

$$\ddot{\delta}_2 + 2C\dot{\delta}_2 + K\delta_2 = P \quad (14)$$

$$\delta_2 = (y_{pd}, y_{gd}, z_{pd}, z_{gd}, y_{rd})^T$$

$$F = (f_y(y_{pd}), f_y(y_{gd}), f_z(z_{pd}), f_z(z_{gd}),$$

$$f_y(y_{pd} + y_{rd} - y_{gd}), f_z(z_{pd} - z_{gd} -$$

$$(y_{pd} + y_{rd} - y_{gd}) \tan(\beta)))^T$$

$$C = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & 0 & 0 & \xi_{15} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & 0 & 0 & \xi_{25} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} & \xi_{35} \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} & \xi_{45} \\ \xi_{51} & \xi_{52} & 0 & 0 & \xi_{55} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & k_{15} & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & k_{25} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & 0 & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = (0, 0, 0, 0, F_1 + F_2 \cos(\omega_3 t + \phi_1) + F_3 \omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \phi_2))^T$$

$$y_{pd} = y_p / b_0$$

$$y_{gd} = y_g / b_0$$

$$z_{pd} = z_p / b_0$$

$$z_{gd} = z_g / b_0$$

$$y_{rd} = y_r / b_0$$

式中: δ_2 为量纲为 1 的位移向量; F 为量纲为 1 的齿侧间隙函数向量; C 为量纲为 1 的阻尼矩阵; ξ_{mn} ($m = 1, \dots, 5; n = 1, \dots, 5$) 为阻尼; K 为量纲为 1 的刚度矩阵; k_{rs} ($r = 1, \dots, 5; s = 1, \dots, 6$) 为刚度; P 为广义载荷矩阵; F_1 为齿轮副传递静态载荷的平均值; F_2 为齿轮系统受到的外部激励; F_3 为齿轮系统受到的内部激励; ω_3 为外部激励频率; ϕ_1, ϕ_2 分别为 F_2 与 F_3

对应的相位角。

扭转相对运动方程归一化后为

$$\begin{aligned} \dot{y}_{rd} + 2(\xi_{51}\dot{y}_{pd} + \xi_{52}\dot{y}_{gd} + \xi_{55}\dot{y}_{rd}) + \\ k_{55}f_y(y_{pd} + y_{rd} - y_{gd}) = F_1 + \\ F_2 \cos(\omega_3 t + \phi_1) + \\ F_3 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t + \phi_2) \end{aligned} \quad (15)$$

$$k_{55} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cos(j\bar{\omega}\tau + \varphi_j)$$

$$k_j = K_j / K_s$$

$$\bar{\omega} = \omega_1 / \omega_2$$

$$\xi_{51} = \xi_{55} = \frac{c_n \cos(\beta)}{2\omega_2 m_\epsilon}$$

$$\xi_{52} = -\frac{c_n \cos(\beta)}{2\omega_2 m_\epsilon}$$

$$F_1 = \frac{F_{p0}}{R_p b_0 K_s}$$

$$F_2 = \frac{m_\epsilon R_p F_{p1}}{I_p b_0 K_s}$$

$$F_3 = \frac{e}{b_0}$$

式中: F_{p0} 与 F_{p1} 分别为静态载荷与波动载荷。

2 共振频率因子分析

为了对系统的频率成分进行分析,取齿轮相对扭转运动方程为例,在式(15)中忽略外部激励,引入小参数 ϵ , 令

$$u = y_{rd}$$

$$\xi_{51} + \xi_{52} + \xi_{55} = \epsilon\mu$$

$$a_1 = \omega_0^2$$

$$a_2 = \zeta$$

则式(15)可写为

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\epsilon\mu u + \left[1 + \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cos(j\bar{\omega}\tau + \varphi_j) \right] \cdot \\ (\omega_0^2 u + \epsilon\zeta u^3) = F_1 + F_3 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}\tau + \phi_2) \end{aligned} \quad (16)$$

式中: μ 为复合阻尼。

采用多尺度法^[20]分析齿轮扭转运动在远离主共振时的谐波运动,设式(16)的一次近似解为

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (17)$$

时间尺度变量 T_0 与 T_1 分别为

$$T_0 = \epsilon^0 \tau$$

$$T_1 = \epsilon^1 \tau$$

式中: u_0 与 u_1 为时间尺度 T_0 与 T_1 的函数。

将式(17)代入式(16),令两端的 ϵ^0 系数相等,得到 0 次近似方程的解为

$$\begin{aligned} u_0 = A \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A} \exp(-i\omega_0 T_0) + \\ B \exp(i\bar{\omega} T_0) + \bar{B} \exp(-i\bar{\omega} T_0) + F_1 / \omega_0^2 \quad (18) \\ B = F_3 \exp(i\phi_2) \bar{\omega}^2 / 2(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) \end{aligned}$$

式中: B 为由 F_3 引起的振幅响应; \bar{B} 为 B 的共轭复数; A 为 T_1 的待定复函数; \bar{A} 为 A 的共轭复数。

将式(17)、(18)代入式(16),同时令两端的 ϵ^1 系数相等,则一次近似方程表示为

$$\begin{aligned} D^2 u_1 = -\exp(i\bar{\omega} T_0) [3\zeta B(\bar{B}^2 + 2\bar{A}^2 + F_1^2 / \omega_0^4) + \\ 2i\bar{\omega}\mu B] - \zeta A^3 \exp(i3\omega_0 T_0) - \zeta B^3 \exp(i3\bar{\omega} T_0) - \\ \exp(i\omega_0 T_0) [3\zeta A(2\bar{B}^2 + \bar{A}^2 + F_1^2 / \omega_0^4) + 2i\omega_0(\mu A + \\ DA)] - 3\zeta F_1 [B^2 \exp(2i\bar{\omega} T_0) + A^2 \exp(2i\omega_0 T_0)] \cdot \\ \omega_0^{-2} - 3\zeta AB^2 \exp[i(2\bar{\omega} - \omega_0) T_0] - 3\zeta \bar{A}^2 \bar{B} \exp[i(\bar{\omega} - \\ 2\omega_0) T_0] - 3\zeta A^2 \bar{B} \exp[i(2\omega_0 - \bar{\omega}) T_0] - 3\zeta A^2 B \cdot \\ \exp[i(2\omega_0 + \bar{\omega}) T_0] - 6\zeta \bar{A} B F_1 \exp[i(\bar{\omega} - \omega_0) T_0] \cdot \\ \omega_0^{-2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j F_1 \exp[i(j\bar{\omega} T_0 + \varphi_j)] - \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j B \omega_0^2 \exp[i(j\bar{\omega} T_0 + \bar{\omega} T_0 + \varphi_j)] - \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j A \omega_0^2 \exp[i(j\bar{\omega} T_0 + \omega_0 T_0 + \varphi_j)] - \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j \bar{B} \omega_0^2 \exp[i(j\bar{\omega} T_0 - \bar{\omega} T_0 + \varphi_j)] - \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} k_j \bar{A} \omega_0^2 \exp[i(j\bar{\omega} T_0 - \omega_0 T_0 + \varphi_j)] + E \quad (19) \end{aligned}$$

$$D = \partial u_1 / \partial T_1$$

式中: E 为与久期项无关的项。

依据消除久期项的条件,在远离主共振的情况下,系统主要存在以下共振频率因子:超谐共振频率, $2\bar{\omega} = \omega_0$ 与 $3\bar{\omega} = \omega_0$; 亚谐共振频率, $\bar{\omega} = 2\omega_0$ 与 $\bar{\omega} = 3\omega_0$; 组合共振频率, $j\bar{\omega} \pm \bar{\omega} = \omega_0$ 。

由上述分析可以看出,斜齿轮传动系统存在多种共振频率因子,下面研究不同的共振频率因子下的系统动态特性。

3 谐振分析

由于高速列车齿轮传动系统固有频率较高,在实际运营中发生亚谐共振的可能性较小,以 $3\bar{\omega} = \omega_0$ 时系统的超谐振动为例,分析系统在 3 阶超谐振动时的响应,引入谐振参数 σ , 设

$$3\bar{\omega} = \omega_0 + \epsilon\sigma \quad (20)$$

将式(20)代入式(19),由消除久期项的条件得

$$\begin{aligned} 3\zeta A(2\bar{B}^2 + \bar{A}^2 + F_1^2 / \omega_0^4) + 2i\omega_0(\mu A + \\ DA) + \zeta B^3 \exp(i\sigma T_1) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

设 A 为 $\alpha_1 \exp(i\alpha_2)/2$, α_1 和 α_2 是关于 T_1 的实函数, 代入式(21), 分离实部和虚部, 得

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{\zeta B^3 \sin(\gamma)}{\omega_0} - \mu \alpha_1 \quad (22)$$

$$\dot{\gamma} = \sigma - \frac{3\zeta F_1^2}{2\omega_0^5} - \frac{3\zeta \bar{B}B}{\omega_0} - \frac{\zeta B^3 \cos(\gamma)}{\omega_0 \alpha_1} - \frac{3\zeta \alpha_1^2}{8\omega_1} \quad (23)$$

$$\gamma = \sigma T_1 - \alpha_2$$

式(22)、(23)非零常值解对应于系统的稳态周期运动, 令 $\dot{\alpha}_1 = \dot{\gamma} = 0$, 可得到 α_1 和 γ 的常值解, 进而得到时域响应方程与频率响应方程分别为

$$u = F_1/\omega_0^2 + F_3 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t + \phi_2)/(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) + \alpha_1 \cos(3\bar{\omega}t - \gamma) \quad (24)$$

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\zeta F_1^2}{2\omega_0^5} - \frac{3\zeta \alpha_1^2}{8\omega_0} - \frac{3\zeta \bar{B}B}{\omega_0} \right)^2 \right] \alpha_1^2 = \frac{\zeta^2 B^6}{\omega_0^2} \quad (25)$$

针对式(25)中不同的静态载荷、内部激励(不考虑相位角)载荷和阻尼, 可得到相应的频率响应曲线, 见图6。由图6可以得出系统在3阶超谐波共振时的振动特点: 系统的非线性使得频率响应曲线弯曲, 引起多值性, 从而存在跳跃等非线性现象; 静态载荷变化会引起共振频率的转移, 但是对幅值没有影响; 内部动态载荷对共振频率和幅值都有影响, 对幅值的影响尤为显著; 阻尼对共振幅值影响显著, 增大阻尼可明显降低共振的幅值。

4 数值分析

由上述分析可知, 齿轮系统的复杂非线性使得系统在不同频率激励时呈现复杂的非线性现象, 为了直观了解系统的谐振响应特性, 对齿轮传动系统方程进行数值求解, 考虑初始条件的影响, 将初始的部分周期略去。齿轮系统的相关参数为: 齿轮模数为 6 mm, 主、被动齿轮齿数分别为 35 与 85; 齿宽为 65 mm; 中心距为 380 mm; 齿侧间隙为 0.115 mm; 螺旋角与压力角为 20° ; 啮合刚度和传递误差分别见图3、4。分别在齿轮额定转速无谐振和谐振工况下求解齿轮系统动力学方程的稳态响应, 得到齿轮扭转方向的位移时程响应见图7~9, 时间、频率与位移的量纲为 1。

从图7~9中可以看出, 相比于不发生谐波振动工况, 齿轮系统在2、3阶超谐波振动时振动幅值明显增大, 波动更为剧烈。在谐振时, 不但存在激励频率为主的主谐频率(3阶超谐波振动的0.37和2阶超谐波振动的0.54), 还能激发较大的主谐频率倍频振动(如3阶超谐波振动的0.75)。而在无谐振时, 系统响应的主频为1.11, 因此, 在列车的运营中, 应制定合

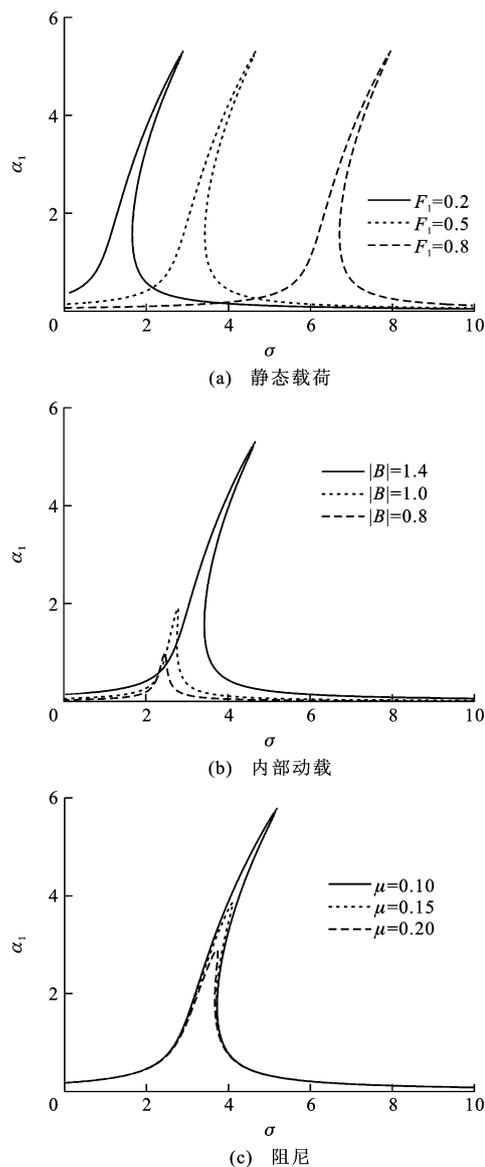


图6 频率响应曲线

Fig. 6 Frequency response curves

理的列车运行速度, 尽量避免谐波振动的发生。为进一步分析系统振动与激励频率之间的关系, 调整激励频率的大小, 分析不同内部激励频率下齿轮扭转方向位移的变化曲线, 见图10。从图10中可知, 在低频振动区, 系统振幅波动频繁, 幅值波动较大, 在0.20附近发生跳跃现象; 在频率大于1.00之后, 振动趋于相对平稳, 该动车组传动系统在额定转速下的激励频率为1.11, 处于一个合理的频率范围之内。

5 结 语

建立了高速列车斜齿轮传动系统动力学模型, 运用多尺度法对考虑了时变刚度、传递误差与齿侧间隙的斜齿轮传动系统的谐波共振进行了分析, 得

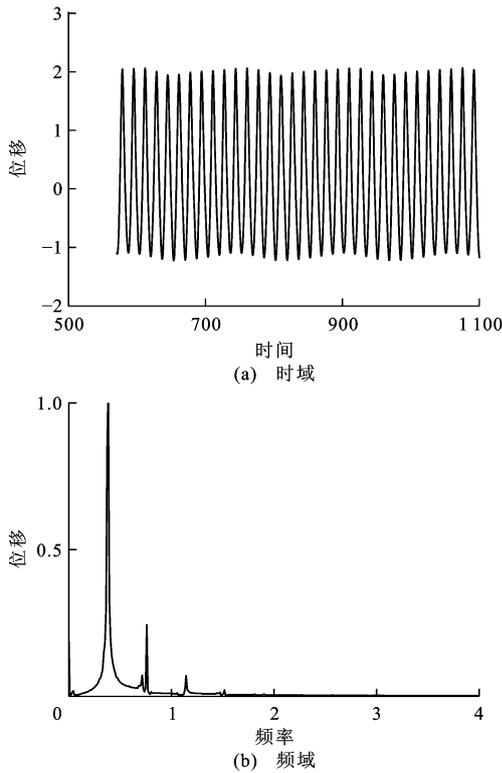


图 7 三阶超谐波响应

Fig. 7 Third-order super-harmonic responses

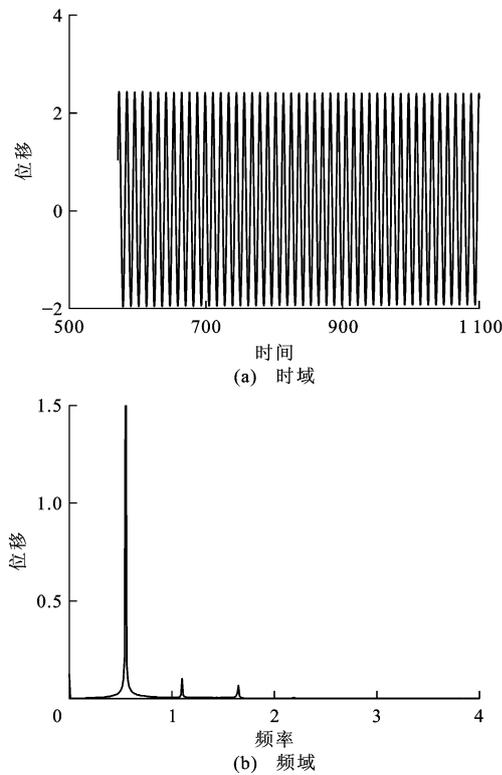


图 8 二阶超谐波响应

Fig. 8 Second-order super-harmonic responses

到了谐振频响曲线,同时运用数值方法求得时间历程曲线,得到以下结论:高速列车齿轮传动系统中存

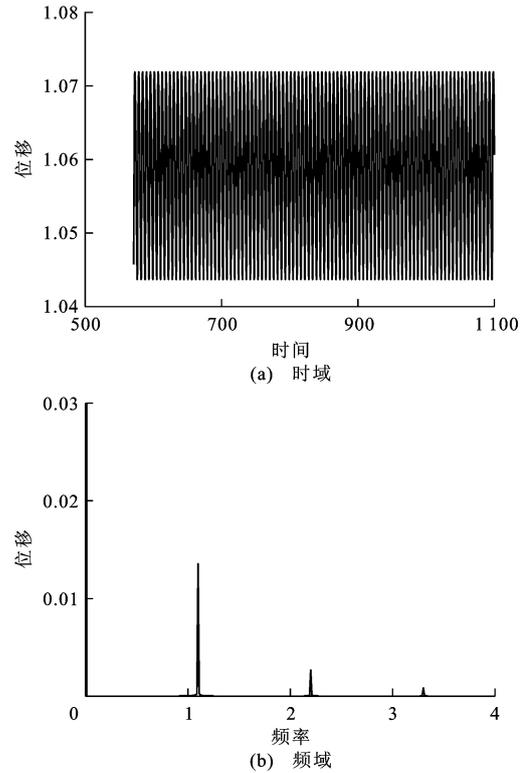


图 9 无谐振响应

Fig. 9 Responses without super-harmonic resonance

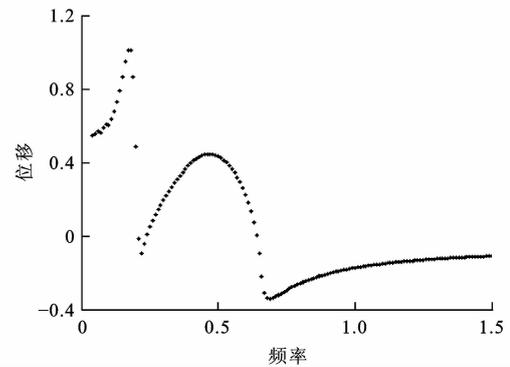


图 10 扭转振动位移

Fig. 10 Torsional vibration displacements

在超谐波共振、亚谐波共振与组合共振等多种谐振形式;系统在超谐波响应时,存在跳跃现象,静态载荷影响共振发生的频率,内部动态载荷和系统阻尼对共振的幅值有较大的影响;谐波能使系统响应急剧增大,随着系统频率增加,系统的振动会发生变化,在低频阶段,系统的波动幅值较大,运动剧烈;在列车的实际运营中,应制定合理的运营速度,以避免谐波的发生。

参考文献:

References:

[1] 王建军,李其汉,李润方. 齿轮系统非线性振动研究进展[J]. 力学进展,2005,35(1):37-51.
WANG Jian-jun, LI Qi-han, LI Run-fang. Research advances for

- nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(1): 37-51. (in Chinese)
- [2] FARSHIDIANFAR A, SAGHAFI A. Global bifurcation and chaos analysis in nonlinear vibration of spur gear systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(4): 783-806.
- [3] YANG Zheng, SHANG Jian-zhong, LUO Zi-rong, et al. Nonlinear dynamics modeling and analysis of torsional spring-loaded antibacklash gear with time-varying meshing stiffness and friction[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, 2013(1): 1-17.
- [4] 张伟,陈予恕. 含有参数激励非线性动力系统的现代理论的发展[J]. *力学进展*, 1998, 28(1): 1-16.
ZHANG Wei, CHEN Yu-shu. Development of modern theory of nonlinear dynamical systems with parametric excitations[J]. *Advances in Mechanics*, 1998, 28(1): 1-16. (in Chinese)
- [5] KAHRAMAN A, SINGH R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 146(1): 135-156.
- [6] KAHRAMAN A, BLANKENSHIP G W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1997, 64(1): 217-226.
- [7] KAHRAMAN A. Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, 115(1): 33-39.
- [8] KAHRAMAN A, SINGH R. Nonlinear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 143(3): 469-506.
- [9] BENTON M, SEIREG A. Factors influencing instability and resonances in geared systems[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1981, 103(2): 372-378.
- [10] BENTON M, SEIREG A. A dynamic absorber for gear systems operating in resonance and instability regions[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1981, 103(2): 364-371.
- [11] RAGHOTHAMA A, NARAYANAN S. Bifurcation and chaos in geared rotor bearing system by incremental harmonic balance method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 226(3): 469-492.
- [12] SEYRANIAN A P, SOLEM F, PEDERSEN P. Multi-parameter linear periodic systems: sensitivity analysis and applications[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(1): 89-111.
- [13] BLANKENSHIP G W, KAHRAMAN A. Steady state forced response of a mechanical oscillator with combined parametric excitation and clearance type non-linearity [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 185(5): 743-765.
- [14] BLANKENSHIP G W, SINGH R. A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, 30(1): 43-57.
- [15] BLANKENSHIP G W, SINGH R. Dynamic force transmissibility in helical gear pairs[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, 30(3): 323-339.
- [16] 姚远,张红军,罗赞,等. 机车传动系统扭转与轮对纵向耦合振动稳定性[J]. *交通运输工程学报*, 2009, 9(1): 17-20.
YAO Yuan, ZHANG Hong-jun, LUO Yun, et al. Torsional-longitudinal coupling vibration stability of drive system for locomotive[J]. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 2009, 9(1): 17-20. (in Chinese)
- [17] 孙涛,沈允文,孙智民,等. 行星齿轮传动非线性动力学方程求解与动态特性分析[J]. *机械工程学报*, 2002, 38(3): 11-15.
SUN Tao, SHEN Yu-wen, SUN Zhi-min, et al. Behavior of planetary gear train solution and dynamic behavior analysis[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2002, 38(3): 11-15. (in Chinese)
- [18] 朱才朝,黄泽好,唐倩,等. 风力发电齿轮箱系统耦合非线性动态特性的研究[J]. *机械工程学报*, 2005, 41(8): 203-207.
ZHU Cai-chao, HUANG Ze-hao, TANG Qian, et al. Analysis of nonlinear coupling dynamic characteristics of gearbox system about wind-driven generator [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(8): 203-207. (in Chinese)
- [19] SIRICHAJ S. Torsional properties of spur gears in mesh using nonlinear finite element analysis[D]. Perth: Curtin University of Technology, 1999.
- [20] 王建军,洪涛,吴仁智,等. 齿轮系统参数振动问题研究综述[J]. *振动与冲击*, 1997, 16(4): 69-73, 97.
WANG Jian-jun, HONG Tao, WU Ren-zhi, et al. Researches on parametric vibration of gear transmission systems—a review[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1997, 16(4): 69-73, 97. (in Chinese)