

文章编号:1671-1637(2014)04-0014-11

采用刚度矩阵法的弹性层状体系数值解法

阳恩慧^{1,2}, 艾长发^{1,2}, 邱延峻^{1,2}

(1. 西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031; 2. 西南交通大学
道路工程四川省重点实验室, 四川 成都 610031)

摘要:从弹性力学基础理论出发,采用刚度矩阵法,推导了应用于直角坐标系下的三维多层弹性层状体系静力学数值解法。引入二维傅里叶变换及高斯积分求解法,基于 MATLAB 数学软件平台编制计算程序,实现三维多层弹性层状体系理论计算方法的数值求解。针对典型有砟轨道轨下基础结构,采用提出的计算方法和编制的相应计算程序对其进行静力学分析,并将所获得的计算结果与采用通用有限元程序 ABAQUS 的计算结果进行对比。分析结果表明:采用提出的计算方法和通用有限元计算方法获得有砟轨道轨下基础最大竖向位移分别为 1.50、1.95 mm,最大竖向应力分别为 0.34、0.21 MPa,计算结果较为接近,计算反映出来的各状态分量变换规律基本一致,提出的计算方法及其相应计算程序可应用于多层弹性层状体系的静力学计算。

关键词:路基工程;弹性层状体系;刚度矩阵法;数值解法

中图分类号:U213.1

文献标志码:A

Numerical method of multi-layer elastic system by using stiffness matrix method

YANG En-hui^{1,2}, AI Chang-fa^{1,2}, QIU Yan-jun^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, Sichuan, China;
2. Highway Engineering Key Laboratory of Sichuan Province, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, Sichuan, China)

Abstract: By using the theory of elastic mechanics and stiffness matrix method, a numerical method of static mechanics for calculating 3D multi-layer elastic system under rectangular coordinate system was developed. 2D Fourier transform and Gauss integral method were used, a calculation program was given based on MATLAB mathematical software platform, and the numerical solution of 3D multi-layer elastic system was got. The static mechanics analysis of ballast track foundation structure was carried out by using the numerical method and program, and the calculation results were compared with the results obtained by using general finite element program ABAQUS. Analysis result shows that the maximum vertical displacements of ballast track foundation are 1.50, 1.95 mm respectively by using the numerical method and general finite element calculation method, and the maximum vertical stresses of the foundation are 0.34, 0.21 MPa respectively by using the two methods. The calculation results are close to each other, and the conversion rules of state components are basically the same according to the calculation, so the proposed numerical method and program can be applied to the static mechanics calculation of multi-layer elastic system. 2 tabs, 9 figs, 24 refs.

收稿日期:2014-03-16

基金项目:国家自然科学基金项目(51308477);中央高校基本科研业务费专项资金项目(2682013BR030)

作者简介:阳恩慧(1982-),男,湖南洞口人,西南交通大学讲师,工学博士,从事道路工程计算力学及新材料研究。

Key words: subgrade engineering; multi-layer elastic system; stiffness matrix method; numerical method

Author resume: YANG En-hui(1982-), male, lecturer, PhD, +86-28-87634347, yeh1982@163.com.

0 引言

弹性层状体系理论自20世纪40年代开始,在国内外取得了巨大的突破和进展,并在工程技术中得到了广泛应用。1943年,美国哥伦比亚大学Burmister首次提出弹性层状体系理论,并先后发表了轴对称荷载作用下双层和三层弹性体系的理论解,为该理论的迅速发展奠定了基础^[1-3],随后相关研究编制完成的BISTRO、BISAR及CIRCLY程序均可实现多层弹性层状体系结构的理论计算;国内最早在1964年由朱照宏等对双层及三层弹性层状体系在单圆均布垂直荷载作用下的力学解答进行了较为全面的理论计算,并提出了数解表及计算图;王凯等推导了应用于多种荷载形式下,考虑完全连续、光滑或半接触状态,多层弹性层状体系的理论解答,并合作编制完成了HPDS软件^[4-7],被中国公路沥青路面结构设计相关规范推荐采用。以上研究成果中关于弹性层状体系理论的研究均与Burmister基于应力及位移函数法出发推导的解析解方法类似。

在国内关于层状体系理论的相关研究成果还有张起森等结合试验验证及理论分析,提出了考虑层间非线性接触的有限元增量子结构分析法^[8-9];黄卫在大量计算和分析的基础上,提出了弹性层状体系弯拉应力的近似计算公式^[10];任瑞波等应用传递矩阵法推导了多层粘弹性半空间体问题的理论解答,并用于计算和研究FWD动态落锤式弯沉的动力学理论计算模拟^[11-12],传递矩阵法克服了应力函数的选取问题,然而其计算和求解过程中常常会遇到溢出或者病态矩阵现象导致计算失败^[13-14];钟阳等提出的类似有限元方法的刚度矩阵法同样不需要引入应力函数,而是直接从弹性力学的基本方程出发,采用矩阵理论以及相应的积分变换等分析方法,实现对多层弹性层状结构体系的力学理论求解^[15-17],该方法可以避免可能导致传递矩阵溢出或病态的矩阵求解问题,然而相关研究中对于直角坐标下多层弹性层状体系结构的刚度矩阵推导未能获得准确的结果。

当前弹性层状体系理论在公路路面以及机场道面等工程结构计算及设计中得到了广泛应用,如中国现行的柔性路面设计规范是以三层弹性体系为基

础,英国地沥青学会的设计规范、壳牌设计法等也都是以层状体系理论作为其理论计算的基础。美国肯塔基大学的Kentrack程序是基于有限元方法及多层弹性层状体系理论编制的,可以应用于铁路轨下基础的结构设计,并能用于分析和计算轨下基础的结构厚度以及疲劳损伤等^[18-20]。

综上所述,弹性层状体系理论在国内外已经有了长久的发展,关于弹性层状体系理论计算方法可以分为Burmister解析法、传递矩阵法以及刚度矩阵法。Burmister解析法推导过程复杂,尤其在多层复杂结构的应用上存在较大的局限性,传递矩阵法又由于其在计算过程中容易出现溢出或者病态矩阵现象导致计算失败,而刚度矩阵法不仅避免了传递矩阵法的病态矩阵问题,也使得弹性层状体系理论计算方法的工程应用可行性显著提高。基于此,本文采用刚度矩阵法,推导了三维多层弹性层状体系理论计算方法,并结合工程实例进行计算对比分析,验证本文推导的三维多层弹性层状体系理论计算方法的可靠性。

1 弹性层状体系静力学基本计算理论

直角坐标系下的三维多层(层数 $n \geq 2$)弹性体系理论计算见图1,计算原点可以选择取在第一层的顶面上部荷载作用中心位置处,垂直顶层层面向下为 z 轴的正向。各层的层厚在水平上保持一致,除地基层为无限半空间体以外其他结构层均为有限厚度层,分别设其厚度为 h_i ,弹性模量及泊松比分别为 E_i 、 μ_i ,均布荷载为 $q(x, y, z)$ 。

假设各层材料都为均质、各向同性的弹性材料,材料的力学特性服从胡克定律;最底层的地基层在水

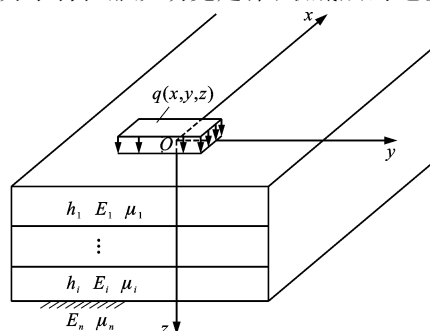


图1 三维多层弹性层状体系理论计算

Fig. 1 Theoretical calculation of 3D multi-layer elastic system

平方向和沿深度方向均为无限体,其上各层厚度均为有限;在最底层无限深处及水平无限远处位移、应力和应变均为 0;各层结构之间的层间接触状态假定为完全连续接触。根据以上的计算图示及其理论假定,由于计算结构为弹性半空间无限体,故沿厚度方向无穷远处,应力和位移分量均趋于 0。

在图 1 所示坐标系中,取出结构中某层内的任意微元体进行受力分析,获得其静力学平衡方程,根据弹性力学理论,结合几何方程以及物理方程,由广义胡克定律推导出用位移表示的三维多层弹性层状体系的静力学平衡方程,并经简化后获得拉姆方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial y} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \\ \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \partial e = \partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\bar{\sigma}_x(\alpha, \beta, z)}{G} = 2i[(2\mu k + \alpha^2 z)c_1 e^{kz} + (2\mu k - \alpha^2 z)c_2 e^{-kz} + \alpha c_3 e^{kz} + \alpha c_4 e^{-kz}] \\ \frac{\bar{\sigma}_y(\alpha, \beta, z)}{G} = 2i[(2\mu k + \beta^2 z)c_1 e^{kz} + (2\mu k - \beta^2 z)c_2 e^{-kz} + \beta c_5 e^{kz} + \beta c_6 e^{-kz}] \\ \frac{\bar{\sigma}_z(\alpha, \beta, z)}{G} = 2i[k(2-2\mu-kz)c_1 e^{kz} + k(2-2\mu+kz)c_2 e^{-kz} - \alpha c_3 e^{kz} - \alpha c_4 e^{-kz} - \beta c_5 e^{kz} - \beta c_6 e^{-kz}] \\ \frac{\bar{\tau}_{xy}(\alpha, \beta, z)}{G} = i(2\alpha\beta c_1 z e^{kz} - 2\alpha\beta c_2 z e^{-kz} + \beta c_3 e^{kz} + \beta c_4 e^{-kz} + \alpha c_5 e^{kz} + \alpha c_6 e^{-kz}) \\ \frac{\bar{\tau}_{xz}(\alpha, \beta, z)}{G} = -2\alpha(1-2\mu-kz)c_1 e^{kz} + 2\alpha(1-2\mu+kz)c_2 e^{-kz} + \frac{1}{k}[(\alpha^2 + k^2)(c_3 e^{kz} - c_4 e^{-kz}) + \alpha\beta(c_5 e^{kz} - c_6 e^{-kz})] \\ \frac{\bar{\tau}_{yz}(\alpha, \beta, z)}{G} = -2\beta(1-2\mu-kz)c_1 e^{kz} + 2\beta(1-2\mu+kz)c_2 e^{-kz} + \frac{1}{k}[\alpha\beta(c_3 e^{kz} - c_4 e^{-kz}) + (\beta^2 + k^2)(c_5 e^{kz} - c_6 e^{-kz})] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{i\bar{\sigma}_z(\alpha, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{xz}(\alpha, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{yz}(\alpha, \beta, z)}{G} \\ i\bar{w}(\alpha, \beta, z) \\ \bar{u}(\alpha, \beta, z) \\ \bar{v}(\alpha, \beta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 e^{kz} & -b_2 e^{-kz} & 2\alpha e^{kz} & 2\alpha e^{-kz} & 2\beta e^{kz} & 2\beta e^{-kz} \\ -\alpha b_3 e^{kz} & \alpha b_4 e^{-kz} & \frac{b_5 e^{kz}}{k} & -\frac{b_5 e^{-kz}}{k} & \frac{\alpha\beta e^{kz}}{k} & -\frac{\alpha\beta e^{-kz}}{k} \\ -\beta b_3 e^{kz} & \beta b_4 e^{-kz} & \frac{\alpha\beta e^{kz}}{k} & -\frac{\alpha\beta e^{-kz}}{k} & \frac{b_6 e^{kz}}{k} & -\frac{b_6 e^{-kz}}{k} \\ -b_7 e^{kz} & b_8 e^{-kz} & \frac{\alpha e^{kz}}{k} & -\frac{\alpha e^{-kz}}{k} & \frac{\beta e^{kz}}{k} & -\frac{\beta e^{-kz}}{k} \\ \alpha z e^{kz} & -\alpha z e^{-kz} & e^{kz} & e^{-kz} & 0 & 0 \\ \beta z e^{kz} & -\beta z e^{-kz} & 0 & 0 & e^{kz} & e^{-kz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\bar{\sigma}_x(\alpha, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\sigma}_y(\alpha, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{xy}(\alpha, \beta, z)}{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ib_9 e^{kz} & ib_{10} e^{-kz} & 2i\alpha e^{kz} & 2i\alpha e^{-kz} & 0 & 0 \\ ib_{11} e^{kz} & ib_{12} e^{-kz} & 0 & 0 & 2i\beta e^{kz} & 2i\beta e^{-kz} \\ 2i\alpha\beta z e^{kz} & -2i\alpha\beta z e^{-kz} & i\beta e^{kz} & i\beta e^{-kz} & i\alpha e^{kz} & i\alpha e^{-kz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: u 、 v 、 w 为 3 个方向的位移分量; μ 为泊松比。

2 直角坐标系下三维多层弹性层状体系传递矩阵推导

2.1 位移及应力二维傅里叶变换域的解答

文献[13]中提出针对空间问题弹性层状体系理论位移及应力表达式推导的方法,本文研究中采用变量替换解法,从拉姆方程出发推导多层弹性层状体系结构的位移和应力解答,见式(2)。

2.2 传递矩阵推导

取出三维多层弹性层状体系结构中的单一层,建立该层局部坐标,假定该层层顶上坐标 z 为 0,该层厚度为 h ,其层顶及层底的应力、位移见图 2。图 2 中为二维傅里叶变换域的应力及位移解, \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 为变换域各方向的位移分量; $\bar{\sigma}_x$ 、 $\bar{\sigma}_y$ 、 $\bar{\sigma}_z$ 为各方向的主应力分量; $\bar{\tau}_{xy}$ 、 $\bar{\tau}_{xz}$ 、 $\bar{\tau}_{yz}$ 为各方向的剪切应力分量; α 、 β 为傅里叶变换后的横、纵坐标。为构建弹性体系结构单一层的传递矩阵,首先将应力、位移二维傅里叶域的表达式表示成为矩阵,见式(3)、(4)。

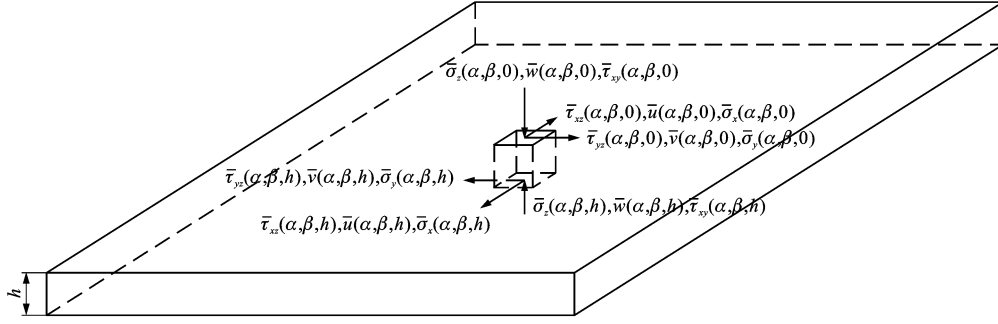


图 2 单一层应力及位移

Fig. 2 Stress and displacement of each layer

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$b_1 = 2k(2 - 2\mu - kz)$$

$$b_2 = 2k(2 - 2\mu + kz)$$

$$b_3 = 2(1 - 2\mu - kz)$$

$$b_4 = 2(1 - 2\mu + kz)$$

$$b_5 = \alpha^2 + k^2$$

$$b_6 = \beta^2 + k^2$$

$$b_7 = 3 - 4\mu - kz$$

$$b_8 = 3 - 4\mu + kz$$

$$b_9 = 2(2\mu k + \alpha^2 z)$$

$$b_{10} = 2(2\mu k - \alpha^2 z)$$

$$b_{11} = 2(2\mu k + \beta^2 z)$$

$$b_{12} = 2(2\mu k - \beta^2 z)$$

式中: G 为重力常数; i 为虚数单位; c_1, c_2, \dots, c_6 为 6 个相互独立的待定常数。

在式(3)、(4)中共有 9 个应力及位移分量, 实际计算中可以先求出 6 个应力及位移分量的解答, 然后再求解余下分量的解答。为了求解的方便, 首先将式(3)调整为

$$\bar{U} = \bar{L}\bar{C} \quad (5)$$

$$\bar{C} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6]^T$$

$$\bar{U} = \left[\frac{i\bar{\sigma}_z(a, \beta, z)}{G} \quad \frac{\bar{\tau}_{xz}(a, \beta, z)}{G} \quad \frac{\bar{\tau}_{yz}(a, \beta, z)}{G} \quad i\bar{w}(a, \beta, z) \quad \bar{u}(a, \beta, z) \quad \bar{v}(a, \beta, z) \right]^T$$

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -b_1 e^{kz} & -b_2 e^{-kz} & 2\alpha e^{kz} & 2\alpha e^{-kz} & 2\beta e^{kz} & 2\beta e^{-kz} \\ -ab_3 e^{kz} & ab_4 e^{-kz} & \frac{b_5 e^{kz}}{k} & -\frac{b_5 e^{-kz}}{k} & \frac{a\beta e^{kz}}{k} & -\frac{a\beta e^{-kz}}{k} \\ -\beta b_3 e^{kz} & \beta b_4 e^{-kz} & \frac{a\beta e^{kz}}{k} & -\frac{a\beta e^{-kz}}{k} & \frac{b_6 e^{kz}}{k} & -\frac{b_6 e^{-kz}}{k} \\ -b_7 e^{kz} & b_8 e^{-kz} & \frac{\alpha e^{kz}}{k} & -\frac{\alpha e^{-kz}}{k} & \frac{\beta e^{kz}}{k} & -\frac{\beta e^{-kz}}{k} \\ \alpha z e^{kz} & -\alpha z e^{-kz} & e^{kz} & e^{-kz} & 0 & 0 \\ \beta z e^{kz} & -\beta z e^{-kz} & 0 & 0 & e^{kz} & e^{-kz} \end{bmatrix}$$

在式(5)中, 对于单一层的顶面 ($z=0$), 该式同

样成立, 由此可以得出

$$\bar{U}_0 = \bar{R}\bar{C} \quad (6)$$

$$\bar{U}_0 = \left[\frac{i\bar{\sigma}_z(a, \beta, 0)}{G} \quad \frac{\bar{\tau}_{xz}(a, \beta, 0)}{G} \quad \frac{\bar{\tau}_{yz}(a, \beta, 0)}{G} \quad i\bar{w}(a, \beta, 0) \quad \bar{u}(a, \beta, 0) \quad \bar{v}(a, \beta, 0) \right]^T$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -4k(1-\mu) & -4k(1-\mu) & 2\alpha & 2\alpha & 2\beta & 2\beta \\ -2\alpha(1-2\mu) & 2\alpha(1-2\mu) & \frac{\alpha^2+k^2}{k} & -\frac{\alpha^2+k^2}{k} & \frac{a\beta}{k} & -\frac{a\beta}{k} \\ -2\beta(1-2\mu) & 2\beta(1-2\mu) & \frac{a\beta}{k} & -\frac{a\beta}{k} & \frac{\beta^2+k^2}{k} & -\frac{\beta^2+k^2}{k} \\ -3+4\mu & 3-4\mu & \frac{\alpha}{k} & -\frac{\alpha}{k} & \frac{\beta}{k} & -\frac{\beta}{k} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

联立式(5)、(6), 可以得出

$$\bar{U} = \bar{L}\bar{R}^{-1}\bar{U}_0 \quad (7)$$

采用初等变换方法求得逆矩阵, 并通过计算整理获得该层弹性体系结构的传递矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{i\bar{\sigma}_z(a, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{xz}(a, \beta, z)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{yz}(a, \beta, z)}{G} \\ i\bar{w}(a, \beta, z) \\ \bar{u}(a, \beta, z) \\ \bar{v}(a, \beta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i\bar{\sigma}_z(a, \beta, 0)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{xz}(a, \beta, 0)}{G} \\ \frac{\bar{\tau}_{yz}(a, \beta, 0)}{G} \\ i\bar{w}(a, \beta, 0) \\ \bar{u}(a, \beta, 0) \\ \bar{v}(a, \beta, 0) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$T_{11} = \cosh(kz) - \frac{kz}{2(1-\mu)} \sinh(kz)$$

$$T_{12} = \frac{\alpha z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) + \frac{(1-2\mu)\alpha}{2(1-\mu)k} \sinh(kz)$$

$$T_{13} = \frac{\beta z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) + \frac{(1-2\mu)\beta}{2(1-\mu)k} \sinh(kz)$$

$$T_{14} = -\frac{k^2 z}{1-\mu} \cosh(kz) + \frac{k}{1-\mu} \sinh(kz)$$

$$T_{15} = \frac{\alpha k z}{1-\mu} \sinh(kz)$$

$$\begin{aligned}
T_{16} &= \frac{\beta k z}{1-\mu} \sinh(kz) \\
T_{21} &= -\frac{\alpha z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) + \frac{(1-2\mu)\alpha}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{22} &= \cosh(kz) + \frac{\alpha^2 z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{23} &= \frac{\alpha\beta z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{24} &= -\frac{\alpha k z}{1-\mu} \sinh(kz) \\
T_{25} &= \frac{\alpha^2 z}{1-\mu} \cosh(kz) + \left[\frac{\mu\alpha^2}{(1-\mu)k} + k \right] \sinh(kz) \\
T_{26} &= \frac{\alpha\beta z}{1-\mu} \cosh(kz) + \frac{\mu\alpha\beta}{(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{31} &= -\frac{\beta z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) + \frac{(1-2\mu)\beta}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{32} &= \frac{\alpha\beta z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{33} &= \cosh(kz) + \frac{\beta^2 z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{34} &= -\frac{\beta k z}{1-\mu} \sinh(kz) \\
T_{35} &= \frac{\alpha\beta z}{1-\mu} \cosh(kz) + \frac{\mu\alpha\beta}{(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{36} &= \frac{\beta^2 z}{1-\mu} \cosh(kz) + \left[\frac{\mu\beta^2}{(1-\mu)k} + k \right] \sinh(kz) \\
T_{41} &= -\frac{z}{4(1-\mu)} \cosh(kz) + \frac{3-4\mu}{4(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{42} &= \frac{\alpha z}{4(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{43} &= \frac{\beta z}{4(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{44} &= \cosh(kz) - \frac{kz}{2(1-\mu)} \sinh(kz) \\
T_{45} &= \frac{\alpha z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) - \frac{(1-2\mu)\alpha}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{46} &= \frac{\beta z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) - \frac{(1-2\mu)\beta}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{51} &= -\frac{\alpha z}{4(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{52} &= \frac{\alpha^2 z}{4(1-\mu)k^2} \cosh(kz) + \frac{4(1-\mu)k^2 - \alpha^2}{4(1-\mu)k^3} \sinh(kz) \\
T_{53} &= \frac{\alpha\beta z}{4(1-\mu)k^2} \cosh(kz) - \frac{\alpha\beta}{4(1-\mu)k^3} \sinh(kz) \\
T_{54} &= -\frac{\alpha z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) - \frac{(1-2\mu)\alpha}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{55} &= \cosh(kz) + \frac{\alpha^2 z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{56} &= \frac{\alpha\beta z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{61} &= -\frac{\beta z}{4(1-\mu)k} \sinh(kz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{62} &= \frac{\alpha\beta z}{4(1-\mu)k^2} \cosh(kz) - \frac{\alpha\beta}{4(1-\mu)k^3} \sinh(kz) \\
T_{63} &= \frac{\beta^2 z}{4(1-\mu)k^2} \cosh(kz) + \frac{4(1-\mu)k^2 - \beta^2}{4(1-\mu)k^3} \sinh(kz) \\
T_{64} &= -\frac{\beta z}{2(1-\mu)} \cosh(kz) - \frac{(1-2\mu)\beta}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{65} &= \frac{\alpha\beta z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz) \\
T_{66} &= \cosh(kz) + \frac{\beta^2 z}{2(1-\mu)k} \sinh(kz)
\end{aligned}$$

3 直角坐标系下三维多层弹性层状体系刚度矩阵推导

基于传递矩阵自身无法避免的缺点——计算中容易出现溢出或病态矩阵而导致计算失败, 本文从传递矩阵出发, 重新推导基于刚度矩阵法的弹性层状体系结构的静力学问题计算方法, 采用刚度矩阵法能有效避免传递矩阵的缺点, 其计算过程可靠。故从传递矩阵式(8)出发, 采用矩阵的分块计算方法, 推导出各层应力与位移的表达式为

$$\begin{bmatrix} i\bar{\sigma}_z(\alpha, \beta, h) \\ \bar{\tau}_{xz}(\alpha, \beta, h) \\ \bar{\tau}_{yz}(\alpha, \beta, h) \\ i\bar{\sigma}_z(\alpha, \beta, 0) \\ -\bar{\tau}_{xz}(\alpha, \beta, 0) \\ -\bar{\tau}_{yz}(\alpha, \beta, 0) \end{bmatrix} = \mathbf{K}^j \begin{bmatrix} i\bar{w}(\alpha, \beta, h) \\ \bar{u}(\alpha, \beta, h) \\ \bar{v}(\alpha, \beta, h) \\ -i\bar{w}(\alpha, \beta, 0) \\ \bar{u}(\alpha, \beta, 0) \\ \bar{v}(\alpha, \beta, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{15} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{16} & k_{26} & k_{36} \\ k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{15} & k_{25} & k_{26} & k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\bar{w}(\alpha, \beta, h) \\ \bar{u}(\alpha, \beta, h) \\ \bar{v}(\alpha, \beta, h) \\ -i\bar{w}(\alpha, \beta, 0) \\ \bar{u}(\alpha, \beta, 0) \\ \bar{v}(\alpha, \beta, 0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{4G(1-\mu)k^2 A [(3-4\mu)AB - 4kh(A+1)]}{\Delta} \\
k_{12} &= \frac{2G\alpha k A [4k^2 h^2 (A+1) - (1-2\mu)(3-4\mu)A^2]}{\Delta} \\
k_{13} &= \frac{\beta}{\alpha} k_{12} \\
k_{14} &= \frac{8G(1-\mu)k^2 DA [(3-4\mu)A - khB]}{\Delta} \\
k_{15} &= -\frac{8G(1-\mu)\alpha k^2 h DA^2}{\Delta} \\
k_{16} &= \frac{\beta}{\alpha} k_{15} \\
k_{22} &= \frac{G \{ (3-4\mu) [4(1-\mu)k^2 - \beta^2] A^2 B + 4kh(A+1) [4(1-\mu)\alpha^2 A - \beta^2 khB] \}}{\Delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{23} &= \frac{G \{ (3-4\mu) \alpha \beta A^2 B + 4 \alpha \beta k h (A+1) [4(1-\mu) A + k h B] \}}{\Delta} \\
k_{25} &= \frac{2 G D \{ 4 \beta^2 k^2 h^2 (A+1) - 4(1-\mu) \alpha^2 k h A B - (3-4\mu) [4(1-\mu) k^2 - \beta^2] A^2 \}}{\Delta} \\
k_{26} &= -\frac{2 G \alpha \beta D [4 k^2 h^2 (A+1) + 4(1-\mu) k h A B + (3-4\mu) A^2]}{\Delta} \\
k_{33} &= \frac{G \{ (3-4\mu) [4(1-\mu) k^2 - \alpha^2] A^2 B + 4 k h (A+1) [4(1-\mu) \beta^2 A - \alpha^2 k h B] \}}{\Delta} \\
k_{36} &= \frac{2 G D \{ 4 \alpha^2 k^2 h^2 (A+1) - 4(1-\mu) \beta^2 k h A B - (3-4\mu) [4(1-\mu) k^2 - \alpha^2] A^2 \}}{\Delta} \\
\Delta &= A k [4 k^2 h^2 (A+1) - (3-4\mu)^2 A^2] \\
A &= e^{-2kh} - 1 \\
B &= e^{-2kh} + 1 \\
D &= e^{-kh}
\end{aligned}$$

式中: K^j 为第 j 层的刚度矩阵。

4 基于刚度矩阵法的弹性层状体系静力学问题求解

4.1 建立弹性层状体系的总刚度矩阵

为构建多层弹性层状体系结构的总刚度矩阵,首先取出某 2 层结构进行分析,假设为第 j 层与第 $j+1$ 层,其上下表面层的局部坐标分别设定为 z_{j-1} 、 z_j 、 z_{j+1} 。

根据式(9)分别建立 2 层弹性层状结构的刚度矩阵,并结合层间完全连续的接触条件,通过整理可以获得该 2 层结构的刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}
i \bar{\sigma}_z^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
\bar{\tau}_{xz}^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
\bar{\tau}_{yz}^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
0 \\
0 \\
0 \\
i \bar{\sigma}_z^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1}) \\
\bar{\tau}_{xz}^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1}) \\
\bar{\tau}_{yz}^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1})
\end{bmatrix}
= \mathbf{K}
\begin{bmatrix}
i \bar{w}^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
\bar{u}^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
\bar{v}^j(\alpha, \beta, z_{j-1}) \\
i \bar{w}^j(\alpha, \beta, z_j) \\
\bar{u}^j(\alpha, \beta, z_j) \\
\bar{v}^j(\alpha, \beta, z_j) \\
i \bar{w}^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1}) \\
\bar{u}^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1}) \\
\bar{v}^{j+1}(\alpha, \beta, z_{j+1})
\end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
k_{11}^j & k_{12}^j & k_{13}^j & k_{14}^j & k_{15}^j & k_{16}^j & 0 & 0 & 0 \\
k_{12}^j & k_{22}^j & k_{23}^j & k_{15}^j & k_{25}^j & k_{26}^j & 0 & 0 & 0 \\
k_{13}^j & k_{23}^j & k_{33}^j & k_{16}^j & k_{26}^j & k_{36}^j & 0 & 0 & 0 \\
k_{14}^j & k_{15}^j & k_{16}^j & k_{11}^j + k_{11}^{j+1} & k_{12}^j + k_{12}^{j+1} & k_{13}^j + k_{13}^{j+1} & k_{14}^{j+1} & k_{15}^{j+1} & k_{16}^{j+1} \\
k_{15}^j & k_{25}^j & k_{26}^j & k_{12}^j + k_{12}^{j+1} & k_{22}^j + k_{22}^{j+1} & k_{23}^j + k_{23}^{j+1} & k_{15}^{j+1} & k_{25}^{j+1} & k_{26}^{j+1} \\
k_{16}^j & k_{26}^j & k_{36}^j & k_{13}^j + k_{13}^{j+1} & k_{23}^j + k_{23}^{j+1} & k_{33}^j + k_{33}^{j+1} & k_{16}^{j+1} & k_{26}^{j+1} & k_{36}^{j+1} \\
0 & 0 & 0 & k_{14}^{j+1} & k_{15}^{j+1} & k_{16}^{j+1} & k_{11}^{j+1} & k_{12}^{j+1} & k_{13}^{j+1} \\
0 & 0 & 0 & k_{15}^{j+1} & k_{25}^{j+1} & k_{26}^{j+1} & k_{12}^{j+1} & k_{22}^{j+1} & k_{23}^{j+1} \\
0 & 0 & 0 & k_{16}^{j+1} & k_{26}^{j+1} & k_{36}^{j+1} & k_{13}^{j+1} & k_{23}^{j+1} & k_{33}^{j+1}
\end{bmatrix}$$

对于地基层,假设其为弹性半空间无限体,即在深度方向 $z \rightarrow \infty$,所有应力和位移均为 0,二维傅里叶变换域的应力和位移同样为 0,可以获得弹性半空间体的刚度矩阵 \mathbf{K}^n 。由此,类似有限元的方法,整体结构所受的外力可以看成最上层顶部施加的由上部轨道结构传递而来的外部荷载作用力以及最下层弹性半空间体内的零荷载,基于此,可建立起多层弹性层状体系结构的总刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix}
\bar{\sigma}_z(\alpha, \beta, 0) \\
\bar{\tau}_{xz}(\alpha, \beta, 0) \\
\bar{\tau}_{yz}(\alpha, \beta, 0) \\
\vdots \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
\mathbf{K}^1 & & & & & & \\
& \mathbf{K}^2 & & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & \mathbf{K}^{n-1} & & & \\
& & & & \mathbf{K}^n & &
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
\bar{w}(\alpha, \beta, 0) \\
\bar{u}(\alpha, \beta, 0) \\
\bar{v}(\alpha, \beta, 0) \\
\bar{w}(\alpha, \beta, h_1) \\
\bar{u}(\alpha, \beta, h_1) \\
\bar{v}(\alpha, \beta, h_1) \\
\vdots \\
\bar{w}(\alpha, \beta, h_{n-1}) \\
\bar{u}(\alpha, \beta, h_{n-1}) \\
\bar{v}(\alpha, \beta, h_{n-1}) \\
\bar{w}(\alpha, \beta, h_n) \\
\bar{u}(\alpha, \beta, h_n) \\
\bar{v}(\alpha, \beta, h_n)
\end{bmatrix} \quad (11)$$

4.2 弹性层状体系静力学问题的真实解答

通过求解式(11),即可获得多层弹性层状体系结构中各层的全部位移及应力在二维傅里叶变换域内的解答,然而要获得该静力学问题的真实解答,还需要进行进一步的二维傅里叶积分的逆变换。

本文中,通过基于 MATLAB 数学工具软件平台,编制相关计算程序,采用二维高斯积分法进行二维傅里叶逆变换计算,最后通过计算获得弹性层状体系的静力学真实解答^[21]。

5 典型工程应用

5.1 计算模型

有砟轨道系统整体结构计算模型见图 3,其包括了上部轨道结构以及下部轨下基础结构。利用有限元计算方法,构建系统整体结构的总刚度矩阵。钢轨

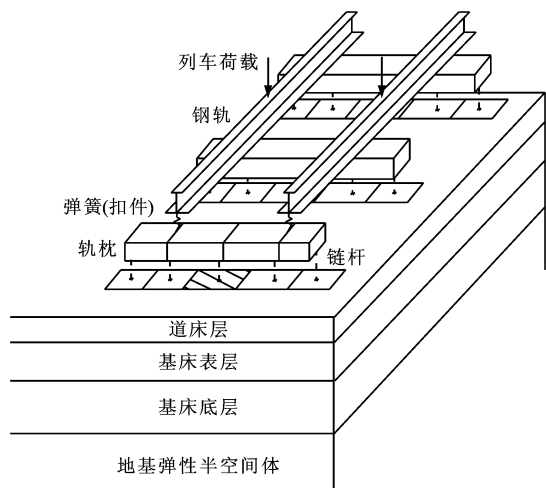


图3 有砟轨道系统整体结构计算模型

Fig. 3 Calculation model of ballast track system overall structure

与轨枕之间由一维弹簧单元相连,而轨枕与下部轨下基础之间假定为链杆相连,各轨枕节点的力通过链杆均匀分摊到阴影部分所示的面积上,其分摊面积设为 $a_i b_i$,该面积的大小根据上部轨枕有限元划分的方式进行确定,采用等效受力的原则作用到相同面积区域内,细部等效转换计算模型见图4,有砟轨道上部轨

道结构单元划分及节点编号见图5。

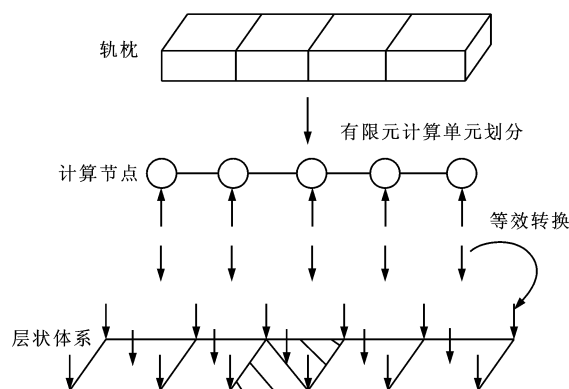


图4 轨枕节点力链杆等效转换

Fig. 4 Equivalent conversion of sleeper nodal force

在轨枕 i 节点处,链杆的受力为 F_{ti} ,其等效作用面积为 $a_i b_i$,故 i 节点以下轨下基础顶面 $a_i b_i$ 区域内承受的均布压力 $p_i(x, y, 0)$ 为 $\frac{F_{ti}}{a_i b_i}$,由此可知,设轨枕第 i 节点的平面位置坐标为 (x_i, y_i) ,并将其取为下部轨下基础局部坐标的原点,则在二维傅里叶变换域内,轨枕 i 节点以下范围内轨下基础顶面 z 为0的边界条件为

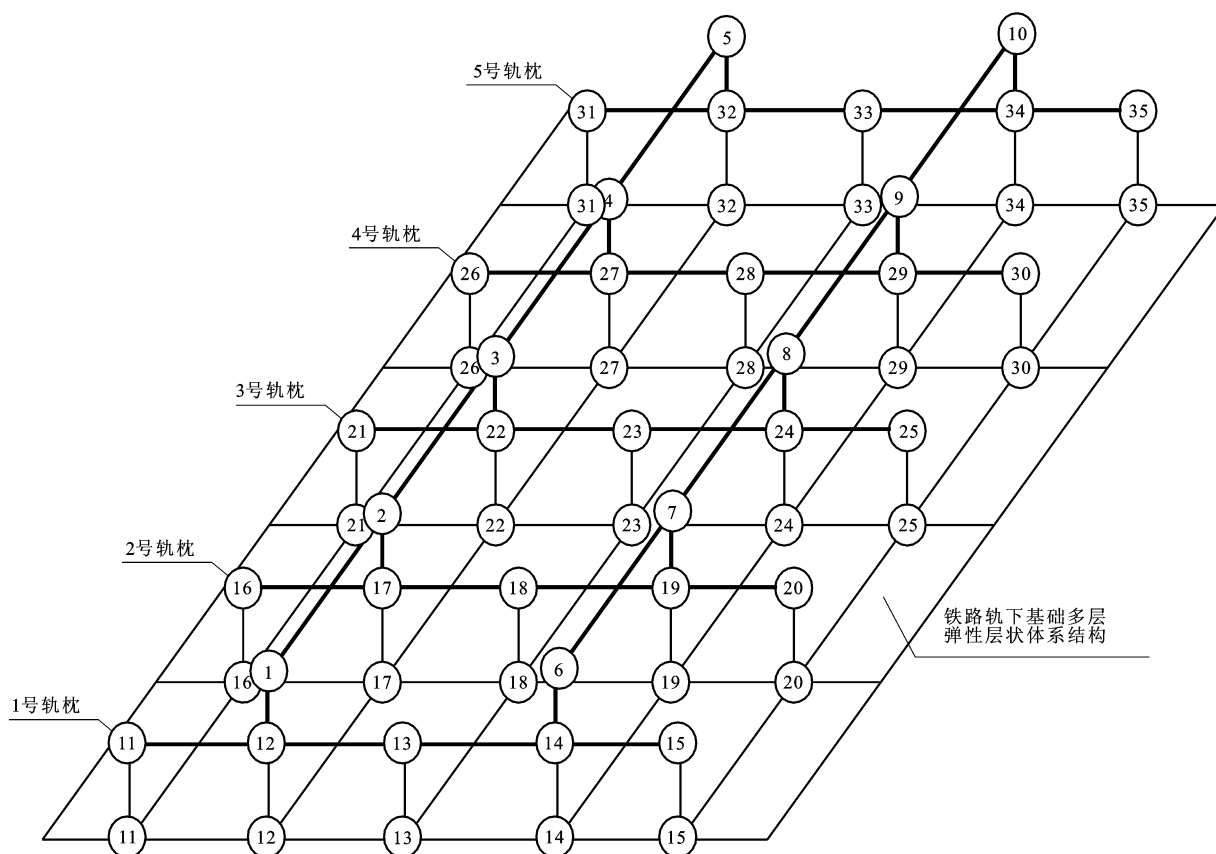


图5 有砟轨道结构单元划分及节点编号

Fig. 5 Structure units and node numbers of ballast track

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{z_i}(\alpha, \beta, 0) = \frac{4\bar{F}_{ti}}{a_i^2 b_i^2 \alpha \beta} \sin\left(\alpha \frac{a_i}{2}\right) \sin\left(\beta \frac{b_i}{2}\right) \\ \bar{\tau}_{xz_i}(\alpha, \beta, 0) = 0 \\ \bar{\tau}_{yz_i}(\alpha, \beta, 0) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式中: a_i 、 b_i 分别为等效作用面的长、宽;带“-”变量为相应变量在二维傅里叶变换域内的值。

基于虚功原理及各层结构材料特性的线弹性假设,可以获得全部的轨枕节点接触反力,即轨下基础参与系统整体结构计算的等效刚度矩阵。轨下基础对轨枕的反力为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_t \end{bmatrix} = \mathbf{K}^f \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (13)$$

将下部轨下基础的反力作为外部力施加到上部轨道结构的轨枕底部,上部轨道结构的整体受力仅包括施加在钢轨之上的列车竖向荷载以及施加在轨枕底部朝上的轨下基础作用反力,从而建立上部轨道结构的整体刚度矩阵。此处采用直接刚度法^[16]建立整体刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} F_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ F_t \end{bmatrix} = \mathbf{K}^s \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_t \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: F_r 为钢轨之上的列车荷载作用力; F_t 为轨枕底部的基础反力; \mathbf{K}^s 为上部轨道结构的整体刚度矩阵; \mathbf{K}^f 为轨下基础参与系统整体结构计算的等效刚度矩阵; δ_r 为钢轨节点的广义位移状态量,包括各节点的竖向位移以及沿 y 轴方向的转角; δ_t 为轨枕节

点的广义位移状态量,包括各节点的竖向位移以及沿 x 轴方向的转角。

将式(13)代入式(14),移项后可得

$$\begin{bmatrix} F_r \\ 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{K}^s + \mathbf{K}^f) \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_t \end{bmatrix} = \mathbf{K} \delta \quad (15)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^s + \mathbf{K}^f$$

式中: \mathbf{K} 、 δ 分别为有砟轨道系统整体结构的总刚度矩阵、位移矩阵。

通过求解式(15),即可获得单轴荷载作用下系统上部轨道结构中钢轨及轨枕内部各节点的位移及内力,并通过叠加原理计算获得多轴荷载叠加效应下轨枕节点传递给下部轨下基础的作用荷载,再将其代入式(11),获得轨下基础各层状体系结构内部的位移及应力在二维傅里叶变换域内的解答,然后再进行二维傅里叶积分的逆变换,方能获得真实解答。

5.2 结构尺寸及材料参数

有砟轨道铁路系统中各结构计算参数见表 1,在参考相关试验结果的同时,着重参考铁路相关设计规范以及国内外同行的相关研究成果^[22-24],对计算参数进行反复斟酌,最终确定较为合适的计算参数。计算中钢轨类型均选用 $60 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ 钢轨,其弹性模量 E 取 $2.059 \times 10^5 \text{ MPa}$,钢轨抗弯截面模量 I 取 $2.037 \times 10^{-5} \text{ m}^4$,扣件(垫板)刚度取 $60 \text{ kN} \cdot \text{mm}^{-1}$,计算荷载采用规范中给出的 ZK 标准荷载。

表 1 有砟轨道计算参数

Tab. 1 Calculating parameters of ballast track

结构	几何尺寸/m	材料	弹性模量/MPa	泊松比	密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
轨枕	长、宽、高分别为 2.60、0.20、0.22	钢筋混凝土	36 000	0.20	2 450
道床层	层厚为 0.45	花岗岩	300	0.35	2 050
基床表层	层厚为 0.60	碎石	200	0.40	2 000
基床底层	层厚为 1.90	A、B 组填料	120	0.40	1 900
地基	无限半空间体	天然土	80	0.40	1 800

5.3 计算结果分析

通过以上程序计算,首先计算获得单轴荷载作用(5 根轨枕分担)下各轨枕节点上的节点力分布,再根据叠加原理获得 ZK 标准荷载中 4 轴共同作用下节点力的大小,计算范围内 13 根轨枕节点力呈现对称分布,单侧上各轨枕中间节点力最大值分别为 2.83、40.18、64.39、55.46、50.76、57.58、55.46 kN。由此可见,最大轨枕节点力出现在第 3、11 号轨枕的中间节点上,最大值为 64.39 kN,同样可以得

出,对于 5 根轨枕分担的假定,最两端 1、13 号轨枕中间节点力分担已经很小,该假定能满足工程精度的要求。

根据计算模型中的链杆连接假定,获得轨下基础表面竖向应力值分布,在轨枕中间各位置点处竖向应力最大值分别为 0.02、0.21、0.34、0.30、0.27、0.31、0.30 MPa,其整体成对称分布,由此可见,轨下基础顶面竖向应力最大值为 0.34 MPa,发生在第 3 根轨枕中间点以下,此处竖向应力为压应力,故

记为负值。

在位移分量中,竖向位移是最需要关注的指标值,是关系到上部轨道结构平顺性以及行车安全性的关键性指标值,也是实现列车高速及重载运行的关键所在,故此处重点对轨下基础的竖向位移进行计算分析。通过以上计算获得有砟轨道轨下基础各层在不同计算位置处竖向位移值(图 6)。根据计算结果可知,轨下基础竖向位移各层在轨枕荷载作用位置下方处相对较大,根据轨枕变形协调性的特点,将上面道床层不同点位的竖向位移进行拟合,在 3、11 号轨枕正下方荷载作用的中心位置处竖向位移最大,其值约为 1.50 mm,竖向位移往下迅速减小,到基床表面顶面最大竖向位移约为 0.82 mm,到基床底层及地基层竖向位移基本为 0。由此可见,上部列车荷载作用下轨下基础的竖向位移主要发生在道床层以及基床表层。

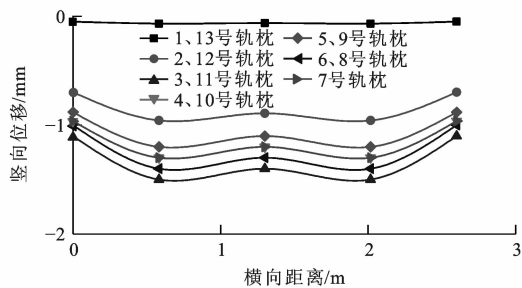


图 6 有砟轨道轨下基础顶面竖向位移

Fig. 6 Vertical displacement above ballast track foundation

5.4 有限元程序对比

有限元计算同样针对本文中采用的典型有砟轨道结构,各结构层计算参数同上,将有限元计算结果与本文计算方法的结果进行对比,对本文程序计算结果进行验证^[19]。同样采用 ZK 标准荷载,有砟轨道根据 ZK 荷载作用的特点以及荷载 5 根轨枕分担的近似假定,选取 13 根轨枕范围作为该计算模型的计算范围,通过综合考虑,建立的有砟轨道整体有限元计算模型见图 7。

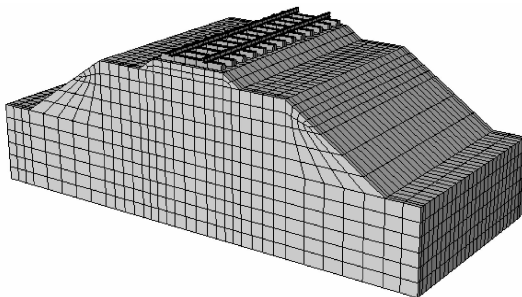


图 7 有限元计算模型

Fig. 7 Finite element calculating model

5.5 竖向位移对比

分别采用本文计算程序以及通用有限元软件 ABAQUS,计算有砟轨道轨下基础的整体结构静力学响应规律,并进行对比分析。首先分别提取计算结果相对较大的轨下基础顶面的竖向位移进行对比(图 8)。由图 8 可知,对比本文程序与有限元软件计算结果,二者反映的位移规律较接近,且最大竖向位移均出现在荷载作用位置处,采用有限元软件的计算结果相对偏大。各结构层顶面最大竖向位移的计算结果对比见表 2,轨下基础顶面的最大竖向位移计算结果分别为 1.50、1.95 mm,二者非常接近。

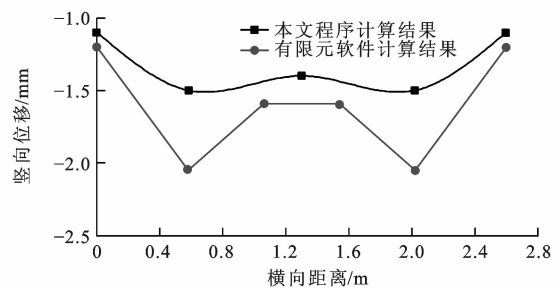


图 8 竖向位移计算结果对比

Fig. 8 Comparison of vertical displacement calculating results

表 2 最大竖向位移对比

Tab. 2 Comparison of maximum vertical displacements mm

计算部位	本文程序计算结果	有限元软件计算结果
道床层顶面	1.50	1.95
基床表层顶面	0.82	1.25
基床底层顶面	0.31	0.50
地基层顶面	微小,忽略不计	微小,忽略不计

5.6 竖向应力对比

采用本文程序及通用有限元程序计算所获得的有砟轨道轨下基础最大竖向应力分别为 0.34、0.21 MPa,另分别提取中间 7 号轨枕处轨下基础顶面横向路线上竖向应力的计算结果进行对比(图 9)。由图 9 可知,采用 2 种计算方法获得的竖向应力较为接近,对比结果不仅在数值上较为一致,而且反映的

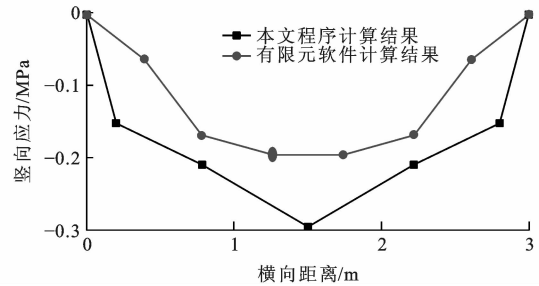


图 9 竖向应力计算结果对比

Fig. 9 Comparison of vertical stress calculating results

规律基本相同。但从对比看,本文的计算结果与有限元计算结果相比均略偏小,此误差可能来自理论假定本身存在的误差,如层状体系无限边界的假定以及等效作用面积的假定等。

6 结 语

本文基于弹性层状体系理论,从弹性力学基本方程出发,采用刚度矩阵法,重新推导了三维多层弹性层状体系的整体刚度矩阵,提出了基于刚度矩阵法的弹性层状体系静力学计算方法。应用二维傅里叶变换以及拉普拉斯变换实现计算方法的数值求解,并基于 MATLAB 软件平台编制计算程序实现了静力学的求解。

针对有砟轨道铁路整体结构,采用有限元法构建起上部轨道结构的刚度矩阵,并基于虚功原理及链杆假定,实现了将三维多层弹性层状体系理论的计算方法应用于铁路结构的静力学理论计算中,构建起了整体结构的静力学计算模型及其求解方法。

分别采用本文程序以及有限元软件 2 种计算方法,对典型有砟轨道铁路系统进行静力学分析,获得有砟轨道轨下基础最大竖向位移分别为 1.50、1.95 mm,最大竖向应力分别为 0.34、0.21 MPa,计算结果较为接近,且计算反映出来的各状态分量变换规律基本一致,验证了采用本文推导的弹性层状体系静力学计算方法及其相应计算程序能应用于轨下基础多层弹性层状体系的静力学计算,可以获得较为理想的计算结果。

参 考 文 献 :

References :

- [1] BURMISTER D M. The general theory of stresses and displacements in layered systems. I[J]. Journal of Applied Physics, 1945, 16(2): 89-94.
- [2] BURMISTER D M. The general theory of stresses and displacements in layered soil system. II [J]. Journal of Applied Physics, 1945, 16(3): 126-127.
- [3] BURMISTER D M. The general theory of stresses and displacements in layered soil system. III [J]. Journal of Applied Physics, 1945, 16(5): 296-302.
- [4] 王 凯. N 层弹性连续体系在圆形均布荷载作用下的应力与位移[J]. 土木工程学报, 1982, 15(2): 65-76.
WANG Kai. Stress and displacements analysis of an N -layered elastic-continuous system under vertical load uniformly distributed on a circular area[J]. China Civil Engineering Journal, 1982, 15(2): 65-76. (in Chinese)
- [5] 王 凯. N 层弹性连续体系在双圆均布复合荷载作用下的力学计算[J]. 固体力学学报, 1983(1): 136-153.
WANG Kai. Calculation of stress, strains and displacements in an N -layered elastic system under the multiple inward horizontal loads on circular areas[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1983(1): 136-153. (in Chinese)
- [6] 王 凯. N 层弹性体系在多圆向心水平荷载作用下的力学计算[J]. 重庆交通学院学报, 1984(2): 50-64.
WANG Kai. Calculation of stress, strains and displacements in an N -layered elastic system under the multiple inward horizontal loads on circular areas[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 1984(2): 50-64. (in Chinese)
- [7] 王 凯, 姚炳卿. N 层弹性体系在多圆旋转水平荷载作用下的力学计算[J]. 西安公路学院学报, 1986, 4(3): 15-30.
WANG Kai, YAO Bing-qing. Calculation of an N -layered elastic system under the action of multiple rotating-horizontal loads distributed on the circular areas[J]. Journal of Xi'an Institute of Highway, 1986, 4(3): 15-30. (in Chinese)
- [8] 张起森. 弹性层状体系理论的实验验证及应用[J]. 土木工程学报, 1985, 18(4): 63-76.
ZHANG Qi-sen. Experimental verification of the elastic layer system theory and its application[J]. China Civil Engineering Journal, 1985, 18(4): 63-76. (in Chinese)
- [9] 张起森, 郑健龙. 弹性层状体系考虑层间接触非线性有限单元分析法[J]. 土木工程学报, 1989, 22(3): 63-75.
ZHANG Qi-sen, ZHENG Jian-long. Finite element analysis of elastic layer system considering nonlinear contact condition between layers[J]. China Civil Engineering Journal, 1989, 22(3): 63-75. (in Chinese)
- [10] 黄 卫. 弹性层状体系弯拉应力近似计算[J]. 岩土工程学报, 1995, 17(6): 52-54.
HUANG Wei. Regression formulas of tensile stress in the elastic multilayer[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 17(6): 52-54. (in Chinese)
- [11] 任瑞波. 沥青路面结构计算方法与 FWD 应用技术的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨建筑大学, 2000.
REN Rui-bo. The study of asphalt pavement structure calculation and FWD application technique[D]. Harbin: Harbin University of Civil Engineering and Architecture, 2000. (in Chinese)
- [12] 任瑞波, 钟岱辉, 孔 军, 等. 沥青路面层状粘弹性半空间轴对称问题的求解[J]. 山东建筑工程学院学报, 2002, 17(4): 1-7.
REN Rui-bo, ZHONG Dai-hui, KONG Jun, et al. The theoretical method for solving axisymmetrical problems in multi-layered viscoelastic asphalt pavement half space[J]. Journal of Shandong Institute of Architecture and Engineering, 2002, 17(4): 1-7. (in Chinese)
- [13] 钟 阳, 王哲人, 郭大智. 求解多层弹性半空间轴对称问题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报, 1992, 25(6): 37-43.
ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi. The transfer matrix method for solving axisymmetrical problems in multi-layered elastic half space[J]. China Civil Engineering Journal, 1992, 25(6): 37-43. (in Chinese)
- [14] 钟 阳, 王哲人, 郭大智, 等. 求解多层弹性半空间非轴对称问

- 题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报, 1995, 28(1): 66-72.
- ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi, et al. Transfer matrix method for solving non-axisymmetrical problems in multilayered elastic half space[J]. China Civil Engineering Journal, 1995, 28(1): 66-72. (in Chinese)
- [15] 钟 阳, 张永山. 求解多层弹性半空间轴对称动态问题的精确刚度矩阵法[J]. 力学季刊, 2003, 24(3): 395-400.
- ZHONG Yang, ZHANG Yong-shan. Explicit solution for axisymmetrical multilayered elastic half space problems by exact stiffness matrix method[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2003, 24(3): 395-400. (in Chinese)
- [16] 钟 阳, 郭大智, 张肖宁. 轴对称弹性半空间问题一般解的新方法[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1995, 28(2): 23-27.
- ZHONG Yang, GUO Da-zhi, ZHANG Xiao-ning. New way of the general solution of axial symmetry elastic half space problem[J]. Journal of Harbin University of Architecture and Engineering, 1995, 28(2): 23-27. (in Chinese)
- [17] 钟 阳, 陈静云, 王 龙, 等. 求解动荷载作用下多层粘弹性半空间轴对称问题的精确刚度矩阵法[J]. 计算力学学报, 2003, 20(6): 749-755.
- ZHONG Yang, CHEN Jing-yun, WANG Long, et al. Explicit solution for dynamic response of axisymmetrical problems in multilayered viscoelastic half space by exact stiffness matrix method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(6): 749-755. (in Chinese)
- [18] HUANG Y H, LIN C, DENG X J, et al. Kentrack: a Computer Program for Hot-mix Asphalt and Conventional Ballast Railway Trackbeds[M]. Lexington and Lanham: Asphalt Institute and NAPA Publication, 1984.
- [19] ROSE J G, SU B, LONG W B. Kentrack: a railway trackbed structural design and analysis program[C]// AREMA. Proceedings of the AREMA 2003 Annual Conference and Exposition. Chicago: AREMA, 2003: 1-25.
- [20] ROSE J G, KONDURI K C. Kentrack—a railway trackbed structural design program[C]// AREMA. Proceedings of the AREMA 2006 Annual Conference and Exposition. Lanham: AREMA, 2006: 1-31.
- [21] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables[M]. New York: Dover Publications, 1965.
- [22] 刘尧军, 郭增强, 赵玉成. 秦沈客运专线不同填料路基动力特性的试验研究[J]. 石家庄铁道学院学报, 2004, 17(2): 19-22.
- LIU Yao-jun, GUO Zeng-qiang, ZHAO Yu-cheng. Research on dynamic characteristics of Qinshen high-speed railway roadbed with different filling materials[J]. Journal of Shijiazhuang Railway Institute, 2004, 17(2): 19-22. (in Chinese)
- [23] WANG Kai-yun, HUANG Chao, ZHAI Wan-ming, et al. Progress on wheel-rail dynamic performance of railway curve negotiation[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering: English Edition, 2014, 1(3): 209-220.
- [24] 杨 尧. 客运专线铁路基床填料动静三轴试验研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2009.
- YANG Yao. Experimental study on typical filler for passenger dedicated railway subgrade roadbed by static and dynamic triaxial test[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009. (in Chinese)

《交通运输工程学报》2015 年征订通知

《交通运输工程学报》是由国家教育部主管、长安大学主办、国务院学位委员会交通运输工程学科评议组、东南大学与西南交通大学共同协办的交通运输领域的学术理论刊物, 两院院士沈志云教授任名誉主任委员; 主要刊载道路与铁道工程、载运工具运用工程、交通运输规划与管理、交通信息工程与控制等领域高水平的学术论文和重大工程实践项目产生的论文; 主要读者对象为国内外交通运输领域的科研人员、工程技术人员及大专院校相关专业的师生。

《交通运输工程学报》为双月刊, 大 16 开本, 128 个页码, 每期定价 30.00 元, 全年共 180.00 元。可到当地邮局订阅, 邮发代号为 52-195, 也可直接汇款至《交通运输工程学报》编辑部订阅。

开户银行: 中国银行西安翠华路支行

账 号: 102407337258

账 户: 长安大学杂志社

邮政编码: 710064

联 系 人: 胡广平

电 话: 029-82334382

地 址: 陕西省西安市南二环路中段长安大学杂志社

E-mail: jygc@chd.edu.cn