

文章编号:1671-1637(2012)02-0100-05

## 有偏好的交通网络路径选择模型

陈京荣<sup>1,2</sup>, 徐瑞华<sup>1</sup>

(1. 同济大学 交通运输工程学院, 上海 201804; 2. 兰州交通大学 数理与软件工程学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:**在城市交通网络中, 已知路径的时间属性与费用属性, 分析了出行者对路径有、无主观偏好时的路径选择问题。当无偏好时, 利用信息熵理论和多属性综合决策方法给出了获得路径综合属性值的计算模型; 当有偏好时, 对不同的路径通过互反判断矩阵给出主观偏好, 然后利用互反判断矩阵之间的偏差建立关于属性权重向量的优化模型, 并采用解析的方法对模型进行求解, 得到每个属性的权重, 从而进一步计算出每条路径的综合属性值, 属性值最大的路径为最优路径。分析结果表明: 在无偏好时最佳选择路径2的综合属性值为0.918; 在有偏好时最佳选择路径4的综合属性值为0.965, 与无偏好的相差较大, 且6条路径的选择次序不同。可见, 出行者的主观偏好对路径选择结果有较大的影响。

**关键词:** 交通网络; 路径选择; 优化模型; 路径偏好; 信息熵; 互反判断矩阵

**中图分类号:** U116.2

**文献标志码:** A

## Route choice model with preferences in traffic network

CHEN Jing-rong<sup>1,2</sup>, XU Rui-hua<sup>1</sup>

(1. School of Transportation Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China;

2. School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, Gansu, China)

**Abstract:** In urban traffic network, when the attributes of times and costs for paths were confirmed, the path selection problems with the preferences of travelers or not were analyzed. When there were no preferences, the integrated attribute value of each path was obtained by using the information entropy theory and the multi-attribute synthetic decision method. When the preferences for different paths were given by using the reciprocal judgment matrixes, for obtaining the weight of each attribute, an optimal model of weight vectors was set up to minimize the deviations between the reciprocal judgment matrixes. The model was solved by the analytic method, the attribute weights were used to calculate the integrated values of the paths, and the path with the maximum was the optimal. Analysis result shows that for the no preference problem, path 2 is the optimal with the integrated value 0.918. Otherwise, for the preference problem, path 4 is the optimal with the integrated value 0.965. Under the two conditions, the orders of six chosen paths are different. So, the preferences of travelers have obvious effect on route choice. 3 tabs, 1 fig, 13 refs.

**Key words:** traffic network; route choice; optimal model; path preference; information entropy; reciprocal judgment matrix

**Author resume:** CHEN Jing-rong(1975-), female, associate professor, PhD, +86-931-4938625,

收稿日期: 2011-12-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(61164003, 60870006); 甘肃省教育厅科研项目(1004-01)

作者简介: 陈京荣(1975-), 女, 甘肃榆中人, 兰州交通大学副教授, 同济大学博士后, 从事网络优化理论与算法研究。

chenjr@mail.lzjtu.cn.

## 0 引言

城市是经济、文化和政治活动的中心,城市交通系统是城市繁荣、有序和快速发展的基本条件。但是随着社会经济的快速发展和城市化进程的不断加快,城市机动车拥有量不断增长,交通需求急剧增加,由此带来的交通拥堵、交通事故、环境污染和能源短缺等交通相关问题已成为世界各国共同面临的难题,不但影响了城市的经济建设和运行效率,而且给人们的生活和工作带来了种种不便,已经制约着城市的可持续发展。由于人们的出行需求是多方面的,因此,有必要研究多属性条件下的交通网络路径选择问题。但是无论采用怎样的技巧与手段,要得出所有的 Pareto 解是比较困难的,因为算法的时间复杂性是指数型的,所以采用近似方法对该问题进行求解成为各国学者研究的热点问题之一。

Lam 等考虑了多个因素,如出发时刻、路径、停车位置与停车时长等,通过建立变分不等式模型并利用遗传算法进行求解<sup>[1]</sup>;Gao 等对于路径选择的策略问题建立了一个基本体系,分析了涉及各个变量,并进行分类,提出了一个具体的算法,但是算法复杂性是指数型的<sup>[2]</sup>;Opasanon 等提出了一个精确产生所有 Pareto 最优解的算法,其中采用随机支配(Stochastic Dominance)择优的方法,但是算法的时间复杂性最终也是指数型的<sup>[3]</sup>;Chang 等采用近似随机优势比较了不同的路径,对危险品的道路运输路径给出了一个算法<sup>[4]</sup>;李振龙通过分析驾驶人间的相互影响,应用演化博弈论研究了在交通诱导的情况下,驾驶人路径选择行为的时间演化规律与驾驶人对路径选择的参与过程<sup>[5]</sup>;王媛等讨论了自适应路径规划系统,给出了驾驶人路径选择偏好权重的确定方法<sup>[6]</sup>;于德新等利用经典的 Dijkstra 算法,综合考虑了距离与行程时间等因素,在重大灾害条件下对道路可靠性与最优路径选取的影响<sup>[7]</sup>;陈京荣等讨论了单属性和多属性条件下的交通网络路径选择模型与算法<sup>[8-10]</sup>。

基于多属性条件,上述学者采用一定的方法讨论了出行者的路径选择问题,但是没有涉及主观偏好对路径选择的影响,且算法时间复杂性是指数型的,所以本文在上述研究的基础上,改善了算法的时间复杂性,讨论了多属性条件下有偏好的路径选择问题。实际上由于出行目的、时间约束与路网信息

等因素的影响,出行者的择路行为存在心理偏差,并表现为各自的择路行为的差异性。在出行过程中,出行者常常会根据个人的经验、喜好或习惯去选择路径,对前方的不同路径给出自己的主观判断,而对具体的属性如时间与费用等没有太多的要求。在这种情况下,本文将展开讨论如何在出行过程中选择一条符合个人意愿的行走路径。

在路径的多个属性已知的条件下,本文首先利用信息熵的理论,建立无偏好的路径选择模型与计算方法;然后讨论路径的主观偏好已知时的路径选择问题,对路径两两进行比较,通过互反判断矩阵给出偏好值,并利用互反判断矩阵之间的偏差建立优化模型,采用解析法对模型进行求解,得到合理的属性权重,从而求得每条路径的综合属性值,以获得最优路径;最后通过算例比较有、无偏好时路径的选择结果,以说明主观偏好对路径选择结果的影响。

## 1 路径选择模型的建立与求解

设  $G=(V, E, \varphi)$  为连通有向简单网络,  $V$  是非空的节点集合,  $E$  为边或路段的集合,  $\varphi$  是集合  $E$  到集合  $V \times V$  的关联函数,它使  $G$  的每条边对应于  $G$  的有序节点对。设从起点  $O$  到终点  $D$  有  $J$  ( $J \geq 2$ ) 条路径,每条路径的性质由  $Q$  ( $Q \geq 2$ ) 个属性来表述,  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_J\}$  和  $U=\{q_1, q_2, \dots, q_Q\}$  为相应的路径集合和属性集合。令  $i$  ( $1 \leq i \leq J$ ) 为行变量,  $j$  ( $1 \leq j \leq Q$ ) 为列变量,  $a_{ij}$  为路径  $x_i$  关于属性  $q_j$  的取值,则可得决策矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1Q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2Q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{J1} & a_{J2} & \cdots & a_{JQ} \end{bmatrix}$$

为了消除不同量纲对决策的影响,对矩阵  $A$  做规范化运算得规范化矩阵为

$$R = (r_{ij})_{J \times Q}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{\min_{1 \leq i \leq J} (a_{ij})}{a_{ij}} & \text{第 } j \text{ 列为成本型} \\ \frac{a_{ij}}{\max_{1 \leq i \leq J} (a_{ij})} & \text{第 } j \text{ 列为效益型} \end{cases} \quad (1)$$

### 1.1 无偏好的路径综合属性值计算模型

熵(Entropy)作为物理概念,最早源于热力学,用于描述系统的无序状态。后来被引入多个领域,

出现了玻尔兹曼熵、信息熵与概率测度熵等,其中信息熵是由香农(Shannon)引入信息论而提出的,为简单巨系统的重要概念,常用于较粗略的度量信息与选择的不确定性<sup>[11]</sup>。对于离散型随机变量,根据信息熵的定义与原理,当系统处于  $n$  种不同状态,每种状态出现的概率为  $p_k (k=1, 2, \dots, n)$  时,系统的信息熵被定义为

$$E = - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k)$$

$E$  是对系统不确定性的一种量度。

基于信息熵理论,在出行者对网络  $G$  中给定的  $J (J \geq 2)$  条路径没有任何主观偏好的条件下,设计路径综合属性值的算法如下。

Step 1 根据路径集合与属性集合写出决策矩阵  $A$ , 并按照效益型和成本型进行规范化得矩阵  $R$ 。

Step 2 对矩阵  $R$  进行列归一化运算,得归一化矩阵

$$G = (g_{ij})_{J \times Q}$$

$$g_{ij} = r_{ij} / \sum_{i=1}^J r_{ij}$$

Step 3 计算属性  $q_j$  的信息熵

$$E_j = - \frac{1}{\ln(J)} \sum_{i=1}^J g_{ij} \ln(g_{ij})$$

Step 4 计算属性权重向量

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q)$$

$$\omega_j = (1 - E_j) / \sum_{j=1}^Q (1 - E_j)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_Q = 1$$

式中:  $\omega_j$  为属性  $q_j$  的权重。

Step 5 计算路径  $x_i$  的综合属性值

$$Z_i(\omega) = \sum_{j=1}^Q r_{ij} \omega_j$$

Step 6 令综合属性值为

$$Z^*(\omega) = \max[Z_i(\omega)]$$

即取最大值对应的路径为相对最优选择。

在算法中,求决策矩阵  $A$  的规范化矩阵需  $JQ$  次除法和  $(J-1)Q$  次比较;归一化运算需  $JQ$  次除法和  $(J-1)Q$  次加法;计算属性  $q_j$  的信息熵产生  $2JQ$  次运算;属性权重向量的计算需  $4Q-1$  次运算;计算  $J$  条路径的综合属性值产生  $J(2Q+1)$  次运算;最后比较择优至多有  $J-1$  次;算法总共的运算次数约为  $8JQ+2Q+2J$ 。

## 1.2 有偏好的路径综合属性值计算模型

在一般情况下,出行者会根据个人的经验、喜好

或习惯去选择路径,并给出自己的主观判断,而对具体的属性没有太多的要求。出行者对路径的偏好信息以互反判断矩阵  $H$  的形式给出

$$H = (h_{is})_{J \times J}$$

$$h_{is} h_{si} = 1$$

$$h_{is} > 0$$

$$h_{ii} = 1$$

表 1 列出了 4 种互反标度<sup>[12]</sup>,由 4 种互反标度构成的判断矩阵均是互反判断矩阵。2、4、6、8 可以取为 1~9 标度的中间值,指数标度中的  $a$  为大于 1 的常数,这些标度的具体取值由决策者主观决定。若路径  $x_i$  与  $x_s$  的重要性之比为  $h_{is}$ ,那么路径  $x_s$  与路径  $x_i$  的重要性之比为  $h_{si}$ 。

表 1 四种互反标度

Tab. 1 Four kinds of reciprocal scales

1~9 标度	指数 标度	10/10~ 18/2 标度	9/9~ 9/1 标度	含义
1	$a^0$	10/10	9/9	路径 $x_i$ 与路径 $x_s$ 同样重要
3	$a^2$	12/8	9/7	路径 $x_i$ 稍微重要于路径 $x_s$
5	$a^4$	14/6	9/5	路径 $x_i$ 明显重要于路径 $x_s$
7	$a^6$	16/4	9/3	路径 $x_i$ 强烈重要于路径 $x_s$
9	$a^8$	18/2	9/1	路径 $x_i$ 极端重要于路径 $x_s$

设出行者根据互反标度对路径进行两两比较,构造互反判断矩阵  $H$ 。为了使决策信息一致化,把所有路径的综合属性值转化为互反判断矩阵形式

$$\bar{H} = (\bar{h}_{is})_{J \times J}$$

$$\bar{h}_{is} = \frac{Z_i(\omega)}{Z_s(\omega)}$$

若互反判断矩阵  $H = \bar{H}$ ,即  $h_{is} = \bar{h}_{is}$ ,则可以直接利用互反判断矩阵的排序方法(例如特征向量法等<sup>[13]</sup>)求出矩阵  $H$  的排序向量,并依此对路径进行排序和择优。

在一般情况下,互反判断矩阵  $H$  和  $\bar{H}$  之间往往存在一定的偏差,为此引入线性偏差函数

$$f_{is}(\omega) = h_{is} \sum_{j=1}^Q r_{sj} \omega_j - \sum_{j=1}^Q r_{ij} \omega_j =$$

$$\sum_{j=1}^Q (h_{is} r_{sj} - r_{ij}) \omega_j$$

为了得到合理的属性权重向量  $\omega$ ,偏差总是越小越好。为了从整体上使偏差最小,采用最小二乘原则,即以“偏差平方和最小”为目标函数,建立优化模型

$$\min F(\omega) = \sum_{i=1}^J \sum_{s=1}^J f_{is}^2(\omega) \quad \omega_j \geq 0 \quad (2)$$

目标函数  $F(\omega) \geq 0$  恒成立,求解  $\omega$  使  $F(\omega)$  达

到最小值。

采用多元函数求极值的 Lagrange 乘数法,对模型进行求解。构造 Lagrange 函数,为

$$L(\omega, \xi) = F(\omega) + 2\xi \left( \sum_{j=1}^Q \omega_j - 1 \right)$$

$\xi$  为待定常数,并令  $\frac{\partial L(\omega, \xi)}{\partial \omega_l}$  与  $\frac{\partial L(\omega, \xi)}{\partial \xi}$  为 0,可得

$$\sum_{i=1}^J \sum_{s=1}^J \left[ \sum_{j=1}^Q 2(h_{is}r_{sj} - r_{ij})\omega_j \right] \cdot (h_{is}r_{sl} - r_{il}) + 2\xi = 0 \quad (3)$$

以  $\omega_l (l=1, 2, \dots, Q)$  为未知数,合并同类项得

$$\sum_{j=1}^Q \left[ \sum_{i=1}^J \sum_{s=1}^J (h_{is}r_{sj} - r_{ij})(h_{is}r_{sl} - r_{il}) \right] \omega_j + \xi = 0 \quad (4)$$

若令

$$e_Q = (1, 1, \dots, 1)_{1 \times Q}$$

$$M = (q_{jl})_{Q \times Q}$$

$$q_{jl} = \sum_{i=1}^J \sum_{s=1}^J (h_{is}r_{sj} - r_{ij})(h_{is}r_{sl} - r_{il}) \quad (5)$$

则式(4)可转化为下列矩阵形式

$$M\omega^T = -\xi e_Q^T \quad (6)$$

将  $\sum_{j=1}^Q \omega_j = 1$  写成向量形式,有

$$e_Q \omega^T = 1 \quad (7)$$

联合式(6)和式(7),求得最优解为

$$\omega^T = \frac{M^{-1}e_Q^T}{e_Q M^{-1}e_Q^T} \quad (8)$$

代入  $Z_i(\omega)$ , 可求得每条路径的综合属性值,最大的即为最优路径。有偏好时的路径综合属性值的算法如下。

Step 1 按照属性为效益型和成本型对决策矩阵  $A$  进行规范化,得规范化矩阵  $R$ 。

Step 2 出行者选取表 1 中的 4 种互反标度之一对  $J$  条路径进行两两比较,给出互反判断矩阵  $H$ 。

Step 3 根据式(5)求出矩阵  $M$  与逆矩阵  $M^{-1}$ 。

Step 4 利用式(8)求属性的权重向量  $\omega$ 。

Step 5 计算路径  $x_i$  的综合属性值  $Z_i(\omega)$ 。

Step 6  $Z_i(\omega)$  中最大值所对应的路径  $x^*$  为最优路径。

在算法中,求决策矩阵  $A$  的规范化矩阵需  $JQ$  次除法和  $(J-1)Q$  次比较;对  $J$  条路径给出互反判断矩阵需  $J(J-1)/2$  次比较;矩阵  $M$  共有  $Q^2$  个元素,求一个元素的乘法与减法次数为  $5J^2$ ,所以得到  $M$  需  $5J^2Q^2$  次运算;为了求  $M^{-1}$ ,先求  $M$  的伴随矩阵  $M^*$ ,得到  $J^2$  个  $J-1$  阶的行列式,而每个行列式需要  $(J-1)!-1$  次加法和  $(J-1)!(J-2)$  次乘法,

同时求  $|M|$  还需  $J!-1+J!(J-1)$  次运算,则求  $M^{-1}$  的运算次数为  $J^2(J!-1)$ ;属性权重向量的计算需  $4Q-1$  次运算;计算  $J$  条路径的综合属性值产生  $J(2Q+1)$  次运算;最后择优有  $J-1$  次比较;算法总的运算次数约为  $5J^2Q^2+J^2J!+4JQ$ 。

在实际的交通网络中,路径数  $J$  和属性数  $Q$  的取值一般介于 1 和 10 之间,当  $J$  和  $Q$  的取值都为 10 时,有偏好算法的运算次数也不超过千万,所以从时间复杂性的角度可知算法的有效性。

## 2 计算结果分析

图 1 为某城区的简化交通网络  $G$ ,共有 25 个节点。设  $G$  的每条路段是双向的,考虑时间和费用两个属性,其取值随机产生且其量纲为 1,见图 1,这里  $Q=2$ 。分别以时间和费用最小为目标函数,采用 Dijkstra 算法求出起讫点对  $(2, 24)$  之间的几条路径,具体计算结果见表 2 中。决策矩阵  $A$  和对应的规范化矩阵  $R$  分别为

$$A^T = \begin{bmatrix} 28 & 29 & 31 & 37 & 32 & 30 \\ 34 & 31 & 34 & 27 & 30 & 31 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.966 & 0.903 & 0.757 & 0.875 & 0.933 \\ 0.794 & 0.871 & 0.794 & 1.000 & 0.900 & 0.871 \end{bmatrix}$$

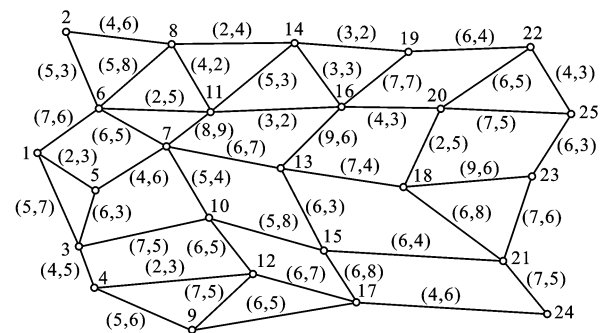


图 1 交通网络

Fig. 1 Traffic network

表 2 起讫点对  $(2, 24)$  间的路径

Tab. 2 Paths of origin-destination site  $(2, 24)$

路径	路径走向	时间	费用
1	2→8→14→16→20→18→21→24	28	34
2	2→6→11→16→20→18→21→24	29	31
3	2→6→7→10→15→17→24	31	34
4	2→6→7→13→18→21→24	37	27
5	2→6→7→10→12→17→24	32	30
6	2→8→11→16→20→18→21→24	30	31

根据表 1 中的 1~9 互反标度对表 2 中的 6 条路径针对出行者的个人意愿进行两两比较,给出互反判断矩阵  $H$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 1/2 & 1/6 & 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 1 & 1/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 6 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

采用对路径无偏好的算法和有偏好的算法,计算可得 6 条路径的综合属性值,见表 3。从表 3 可以看出,在对路径没有偏好时,6 条路径的选优顺序为 2、6、1、5、4、3,路径 2 为最佳选择;当出行者对路径有偏好时,6 条路径的选优顺序为 4、5、6、2、3、1,路径 4 为最佳选择。可见,当出行者对路径有偏好时,其主观因素对具体的路径选择结果会有很大的影响,并且当主观意愿发生变化时,相应的结果也会有所不同。

表 3 路径综合属性值

Tab. 3 Integrated attribute values of paths

算法	路径 1	路径 2	路径 3	路径 4	路径 5	路径 6
无偏好算法	0.897	0.918	0.849	0.878	0.887	0.902
有偏好算法	0.576	0.770	0.679	0.965	0.927	0.805

### 3 结 语

在多属性的路径选择过程中,本文首先利用信息熵理论和多属性的决策方法,对无偏好的路径选择问题给出了一种求解算法,可以得到各个属性相对比较均衡的路径选择结果;分析了出行者有主观偏好时的路径选择问题,由于出行者的主观偏好与客观信息之间存在一定的偏差,为了尽可能地减小这种偏差,文中给出了优化模型与相应算法;通过算例比较了有、无主观偏好时的路径选择结果,证明主观偏好对路径选择结果有较大的影响,这样使得出行者的个人意愿从理性的角度得到了满足,更加符合实际情况。

#### 参 考 文 献 :

#### References :

- [1] LAM W H K, LI Zhi-chun, HUANG Hai-jun, et al. Modeling time-dependent travel choice problems in road networks with multiple user classes and multiple parking facilities[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2006, 40(5): 368-395.
- [2] GAO Song, CHABINI I. Optimal routing policy problems in stochastic time-dependent networks [J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2006, 40(2): 93-122.
- [3] OPASANON S, MILLER-HOOKS E. Multicriteria adaptive paths in stochastic, time-varying networks [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 173(1): 72-91.
- [4] CHANG T S, NOZICK L K, TURNQUIST M A. Multi-

objective path finding in stochastic dynamic networks, with application to routing hazardous materials shipments[J]. Transportation Science, 2005, 39(3): 383-399.

- [5] 李振龙. 诱导条件下驾驶员路径选择行为的演化博弈分析[J]. 交通运输系统工程与信息, 2003, 3(2): 23-27.  
LI Zhen-long. A study of route choice behavior of drivers based on the evolutionary game under the condition of traffic flow guidance[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2003, 3(2): 23-27. (in Chinese)
- [6] 王 媛, 杨兆升, 管 青, 等. 自适应路径规划系统研究[J]. 公路交通科技, 2009, 26(5): 117-122.  
WANG Yuan, YANG Zhao-sheng, GUAN Qing, et al. Study on adaptive route planning system [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2009, 26(5): 117-122. (in Chinese)
- [7] 于德新, 杨 薇, 杨兆升. 重大灾害条件下基于 GIS 的最短路径改进算法[J]. 交通运输工程学报, 2011, 11(4): 123-126.  
YU De-xin, YANG Wei, YANG Zhao-sheng. Shortest path improved algorithm based on GIS under large-scale disaster [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2011, 11(4): 123-126. (in Chinese)
- [8] 陈京荣. 交通网络路径选择及应用研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2009.  
CHEN Jing-rong. Research on route choice and its application in traffic networks[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2009. (in Chinese)
- [9] 陈京荣, 俞建宁, 李引珍. 随机时间依赖交通网络自适应路径选择[J]. 西南交通大学学报, 2009, 44(4): 523-529.  
CHEN Jing-rong, YU Jian-ning, LI Yin-zhen. Adaptive path selection in stochastic and time-dependent traffic networks [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2009, 44(4): 523-529. (in Chinese)
- [10] 陈京荣, 俞建宁, 李引珍. 基于蚁群算法的多属性路径选择模型[J]. 系统工程, 2009, 27(5): 30-34.  
CHEN Jing-rong, YU Jian-ning, LI Yin-zhen. Model of choosing routes with multi-attributes based on ant colony algorithm [J]. Systems Engineering, 2009, 27(5): 30-34. (in Chinese)
- [11] 张文泉, 张世英, 江立勤. 基于熵的决策评价模型及应用[J]. 系统工程学报, 1995, 10(3): 69-74.  
ZHANG Wen-quan, ZHANG Shi-ying, JIANG Li-qin. A decision assessment model based on entropy and its application [J]. Journal of Systems Engineering, 1995, 10(3): 69-74. (in Chinese)
- [12] 徐泽水. AHP 中两类标度的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97-101.  
XU Ze-shui. Study on the relation between two classes of scales in AHP [J]. Systems Engineering—Theory and Practice, 1999, 19(7): 97-101. (in Chinese)
- [13] XU Ze-shui, WEI Cui-ping. A new method for priorities in the analytic hierarchy process [J]. Operations Research Transactions, 2000, 4(3): 47-54.