

文章编号:1671-1637(2012)01-0121-06

## VMS行程时间诱导效益仿真算法

干宏程, 杨珍珍

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘要:**基于宏观交通仿真模型,提出了可变情报板(VMS)行程时间诱导效益仿真算法,分析了驾驶人的信息关注率和信息理解偏差系数对VMS行程时间诱导效益的影响。以行程时间计算模型和驾驶人信息响应模型与METANET仿真模型为理论基础,以路网总耗时改善率为诱导效益目标,在3种不同规模的路网上进行仿真试验。仿真结果表明:VMS行程时间对于改善路网运行效率通常具有正面的诱导效益;信息关注率越高,信息理解偏差系数越小,诱导效益越显著;当信息关注率为80%以上时,小型、中型、大型3种路网的诱导效益分别达到28.89%、15.87%、10.53%以上。可见,仿真算法有效。

**关键词:**宏观交通仿真;可变情报板;交通需求;行程时间;信息响应;诱导效益;路径选择

**中图分类号:**U491.112

**文献标志码:**A

## Inductive benefit simulation algorithm of VMS travel time

GAN Hong-cheng, YANG Zhen-zhen

(School of Business, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** Based on macroscopic traffic simulation model, the inductive benefit simulation method of variable message sign (VMS) travel time was proposed, and the influences of information concern ratio and information comprehension deviation coefficients for drivers on the inductive benefit of VMS travel time were analyzed. The travel time calculation model, driver information response model and METANET simulation model were taken as theory foundations, the improving ratio of total road network consuming time was taken as inductive benefit objective, and simulation tests on three road networks with different sizes were carried out. Simulation result shows that VMS travel time normally has positive inductive benefit on improving the running efficiency of road network. The higher the information concern ratio is, the smaller the information comprehension deviation coefficient is, and the more significant the inductive benefit is. While information concern ratio is over 80%, the inductive benefits of small, medium and large road networks are above 28.89%, 15.87% and 10.53% respectively. So the simulation algorithm is effective. 1 tab, 10 figs, 16 refs.

**Key words:** macroscopic traffic simulation; variable message sign; traffic demand; travel time; information response; inductive benefit; route choice

**Author resume:** GAN Hong-cheng (1978-), male, associate professor, PhD, +86-21-65679404, hongchenggan@126.com.

收稿日期:2011-09-15

基金项目:国家自然科学基金项目(51008195);上海市重点学科建设项目(S30504)

作者简介:干宏程(1978-),男,浙江宁波人,上海理工大学副教授,工学博士,从事智能交通与交通规划研究。

## 0 引 言

城市交通拥挤日趋严重,而继续扩建道路设施的余地越来越有限,因此,人们更多地倾向于利用先进的交通信息系统改变现有道路资源的通行能力。可变情报板(Variable Message Sign, VMS)作为先进交通信息系统发布实时信息的常用手段,可以用来诱导驾驶人合理选择路径,均衡路网交通流量,缓解城市交通拥挤。

国内外学者针对 VMS 信息诱导相关问题进行了大量研究,在驾驶人信息响应方面,Richards 等运用问卷调查方法评估了城市交通路网中用户对 VMS 行程时间信息的反应情况<sup>[1]</sup>;Erke 等探讨了 VMS 行程时间信息对驾驶人的路径选择、速度与刹车等行为的影响<sup>[2]</sup>;干宏程等采用意向调查方法探索了在 VMS 行程时间信息可同时提供快速路和替换路径行程时间条件下的驾驶人路径选择行为,并建立了 Probit 模型求解相关问题<sup>[3-4]</sup>。在技术信息对交通网络运行效率的影响方面,魏赞等用元胞自动机模型模拟了在不同交通量与诱导率情况下交通诱导信息对交通流的影响<sup>[5]</sup>;吴文祥等应用随机均衡和确定性均衡 2 种分配模型分析了信息发布对平均出行成本的影响,并研究了表征行为随机程度的模型参数与系统性能指标之间的关系<sup>[6]</sup>;安实等采用多智能体建模与仿真方法研究了提供出行前信息下的通勤者出行行为<sup>[7]</sup>;石小法等利用随机均衡模型分析了交通信息对交通网络的影响,并对不提供交通信息和提供交通信息的 2 种模型进行了比较<sup>[8]</sup>;Mammar 等运用宏观交通仿真方法对 Aalborg 市的 VMS 行程时间信息系统的运行效益进行了评价<sup>[9]</sup>;孟超等利用 VISSIM 软件模拟了不同道路状况下 VMS 行程时间信息对驾驶人路径选择行为的影响<sup>[10]</sup>;杨晓光等采用仿真方法分析了在不同交通信息准确度、交通系统稳定性、交通信息提供方案条件下的交通信息的有效性<sup>[11]</sup>;杨珍珍等应用宏观交通仿真方法进行了快速路网控制策略的评价案例分析<sup>[12]</sup>;尚华艳等利用元胞传输模型对 VMS 行程时间信息系统的选址问题进行了研究<sup>[13]</sup>;Gan 等研究了图型 VMS 行程时间信息生成方法与位置设立方法,并提出了一种基于宏观交通流模型的行程时间预测方法<sup>[14-15]</sup>。以上研究对交通诱导策略的设计、评价以及优化具有指导意义。

在以上研究的基础上,本文提出了一种基于宏观交通流仿真的 VMS 行程时间诱导效益分析方法,

将考虑实际交通控制特点的行程时间计算模型与基于离散选择的驾驶人信息响应模型融入到宏观交通流模型,分析驾驶人的信息关注率与信息理解偏差对路网诱导效益的影响,为城市交通诱导策略的制定与优化提供理论依据与政策启示。

## 1 基于宏观交通仿真的 VMS 行程时间诱导效益分析方法

### 1.1 分析方法

在宏观交通仿真模型中,交通流是由大量车辆组成的可压缩的连续流体,车流运行状态表现为流量、密度与速度等集计变量。宏观交通仿真不仅能用于设计、测试和评价控制策略,而且能够用于路网实时控制。基于宏观交通仿真的 VMS 行程时间诱导效益分析思路是将反映实际交通控制特点的行程时间计算模型、基于离散选择模型的驾驶人信息响应模型与宏观交通仿真模型三者相互融合,在给定基本交通仿真参数(主要指路网几何属性参数和交通流模型参数)和 VMS 行程时间相关参数的条件下,计算机根据相应程序自动计算出行程时间诱导效益的评价指标,并通过分析仿真结果得到 VMS 行程时间相关参数与诱导效益之间的关系。本文中的 VMS 行程时间相关参数是指驾驶人的信息关注率、信息理解偏差系数与交通流的信息更新周期,VMS 行程时间诱导效益分析方法见图 1。

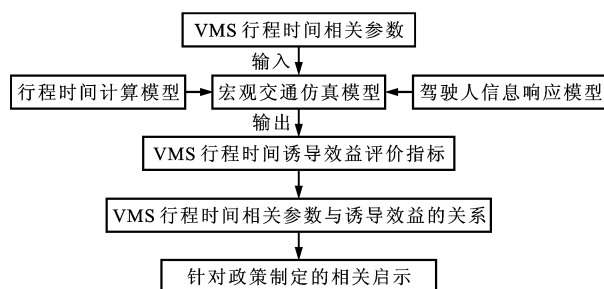


图 1 分析方法

Fig. 1 Analysis method

### 1.2 宏观交通仿真模型

一般情况下,交通网络是由节点和有向路段组成。宏观交通仿真模型通常采用时空离散的差分方程来描述城市道路的路段交通流演化,并结合节点模型和起点排队模型,刻画整个城市道路网交通状态的动态变化过程。作为典型的城市道路网交通仿真模型,METANET 仿真模型可以被描述为<sup>[16]</sup>

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T}{\Delta_{m,i} \lambda_m} [q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k)] \quad (1)$$

$$q_{m,i}(k) = \rho_{m,i}(k) v_{m,i}(k) \lambda_m \quad (2)$$

$$v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \frac{T}{\tau} [v_0 - v_{m,i}(k)] \cdot \frac{T}{\Delta_{m,i}} v_{m,i}(k) [v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)] - \frac{\nu T [\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)]}{\tau \Delta_{m,i} [\rho_{m,i}(k) + \kappa]} \quad (3)$$

$$v_0 = v_{f,m} \exp \left\{ -\frac{1}{a_m} \left[ \frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{c,m}} \right]^{a_m} \right\} \quad (4)$$

式中:  $\rho_{m,i}(k)$ 、 $q_{m,i}(k)$ 、 $v_{m,i}(k)$  分别为  $k$  时刻路段  $m$  第  $i$  小段的交通流密度、流量与速度;  $T$  为交通流状态的演化步长;  $\Delta_{m,i}$  为路段  $m$  第  $i$  小段长度;  $\lambda_m$  为路段  $m$  的车道数量;  $v_0$  为稳态交通流速度;  $v_{f,m}$  为路段  $m$  交通流的自由流速度;  $\rho_{c,m}$  为路段  $m$  交通流的临界密度;  $\tau$ 、 $\nu$ 、 $\kappa$  均为常量参数;  $a_m$  为与路段  $m$  有关的常量参数。

### 1.3 行程时间计算模型

为了建模方便,以一个两起点两终点的交通路网为例(图 2)给出模型,图中带圈数字表示节点。从主线起点至主线出口,在分流节点 2 处有 2 条路径供驾驶人选择,路径 ②-③-⑤ 记为路径 1,路径 ②-④-⑤ 记为路径 2。在城市交通管理中,通常利用布置检测线圈实测各小段交通流的流量、速度与密度,检测线圈布置见图 3,路段  $m$  被检测线圈分为  $s$  个不同小段,  $Q_{m,i}(d)$ 、 $V_{m,i}(d)$ 、 $P_{m,i}(d)$  分别为路段  $m$  第  $i$  小段第  $d$  个检测周期交通流的流量、速度与密度,  $Q_{m,0}(d)$  为路段  $m$  的第 1 小段第  $d$  个检测周期交通流的流量。

行程时间计算模型主要用来反映城市快速路的监控系统特点,直接利用单个检测周期的检测数据估计 VMS 行程时间信息下一个更新周期小段的行程时间随机性较大,因此,监控系统一般采用多个检测周期的平均检测数据估计 VMS 行程时间信息下一个更新周期小段的行程时间,将小段行程时间加和后得到路径行程时间。路径 1、2 的行程时间  $t_1$ 、

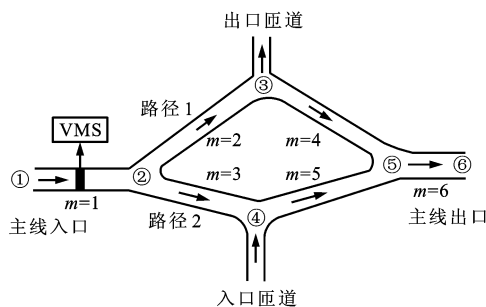


图 2 交通路网

Fig. 2 Traffic network

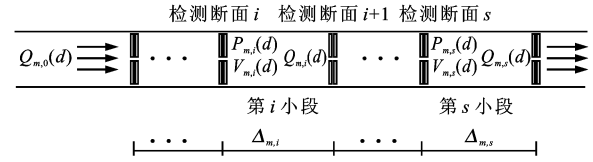


图 3 检测线圈

Fig. 3 Detecting coils

$t_2$  均可表示为

$$t_1 = t_2 = \sum_m \sum_{i=1}^s \frac{\Delta_{m,i}}{\frac{1}{N_D} \sum_{d=1}^g V_{m,i}(d)} \quad (5)$$

$$l = uC_1/T - N_D$$

$$g = uC_1/T - 1$$

式中:  $u$  为 VMS 行程时间更新周期时间指标;  $C_1$  为 VMS 行程时间信息更新周期;  $C_D$  为检测器的检测周期;  $N_D$  为计算行程时间所用到的检测周期数。

在式(5)中,当计算  $t_1$  时,  $m$  取 2 或 4; 当计算  $t_2$  时,  $m$  取 3 或 5。

### 1.4 驾驶人信息响应模型

当驾驶人接收到 VMS 行程时间信息后,通常只有当替换路径的行程时间比当前行驶路径的行程时间节省量超过某一阈值时才会响应信息,再根据行程时间信息与自身经验选择路径。一般情况下,可用 logit 模型来计算驾驶人响应信息选择路径的概率。考虑到部分驾驶人会忽视 VMS 行程时间信息,因此,引入信息关注率  $E \in [0, 1.0]$  来表征关注特性,  $E$  分别为 0、1.0 时表示所有驾驶人都会忽略、响应 VMS 行程时间信息。驾驶人信息响应模型为

$$p_2^j = \frac{\exp(-\omega t_j)}{\sum_{j=1}^2 \exp(-\omega t_j)} \quad (6)$$

$$\beta_1^j = (1-E)\beta_2^j + E p_2^j \quad (7)$$

式中:  $p_2^j$  为节点 2 处驶往主线出口的驾驶人中响应 VMS 行程时间信息后选择路径  $j$  ( $j=1, 2$ ) 的概率;  $\beta_1^j$  为发布 VMS 行程时间信息时的实际分流比例;  $\beta_2^j$  为不发布 VMS 行程时间信息时的正常分流比例;  $\omega$  为驾驶人信息理解偏差系数,可以通过行为研究标定得到,  $\omega$  趋于 0 时,驾驶人等概率地选择各条路径,  $\omega$  趋于无穷大时,几乎所有驾驶人倾向于选择 VMS 行程时间最短的路径。

## 2 计算结果分析

### 2.1 仿真条件

为充分考虑  $E$  和  $\omega$  对 VMS 行程时间诱导效益的影响,在 3 种不同规模的路网上进行仿真计算,

路网尺寸见表 1,部分交通需求时变轨迹见图 4。本文采用 METANET 软件开发程序, $T$  取为 10 s, $C_D$  取为 20 s, $C_1$  取值范围为 40~400 s,以覆盖现实中常见取值范围。

表 1 路网尺寸

Tab. 1 Road network sizes							km
路段	1	2	3	4	5	6	
小型路网	4	5	3	5	4	3	
中型路网	4	10	6	10	8	3	
大型路网	4	20	12	20	16	3	

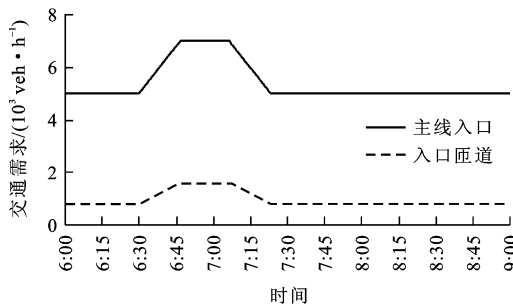


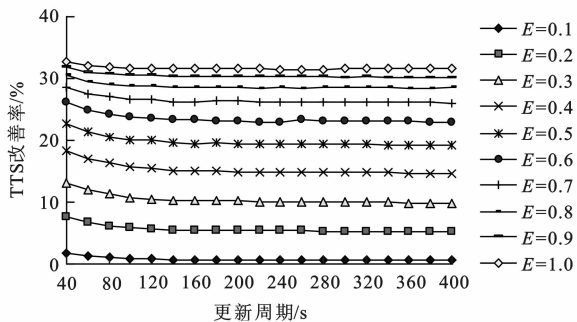
图 4 交通需求

Fig. 4 Traffic demands

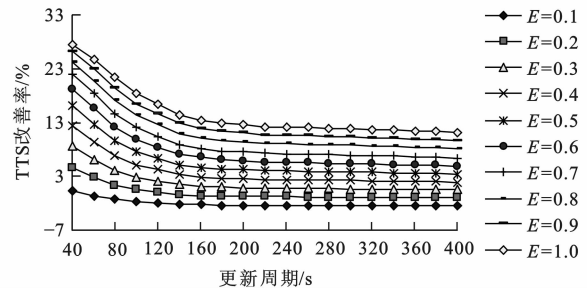
当无 VMS 行程时间信息诱导时,根据用户均衡准则计算得到小型、中型与大型路网的主路径选择比例(名义分流比例)分别为 0.715、0.686、0.680。

## 2.2 仿真结果分析

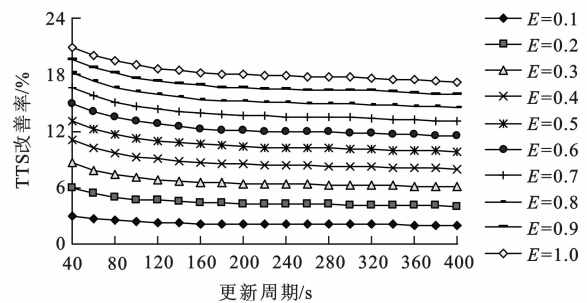
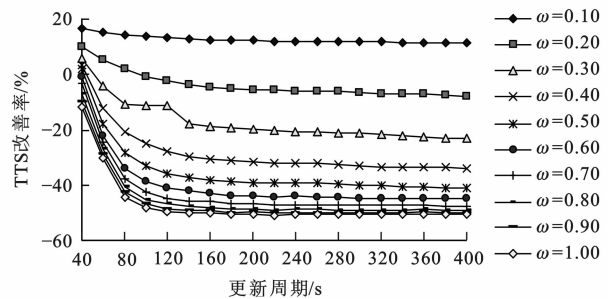
路网总耗费时间(TTS)由路网总行程时间和起点排队时间两部分组成<sup>[9]</sup>。对于小型路网,当  $\omega$  为 0.10, $C_1$  变化时,TTS 改善率曲线见图 5。TTS 改善率随  $C_1$  增大而减小,但是在  $C_1$  大于 120 s 后减小趋势已不明显;TTS 改善率随  $E$  增大而增大,说明关注 VMS 行程时间信息的驾驶人比例越大,VMS 行程时间对路网运行效率改善作用越明显,当  $E$  为 1.0 时,TTS 改善率最高可达 33%,当  $E$  为 0.1 时,TTS 改善率仅为 1%左右。

图 5  $\omega$  为 0.10 时的 TTS 改善率曲线Fig. 5 Curves of TTS improvement rates while  $\omega$  is 0.10

当  $\omega$  为 0.30 时,TTS 改善率曲线见图 6。TTS 改善率随  $E$  增大而下降,并且在  $E$  很小时出现负值,即诱导未能改善路网运行效率。

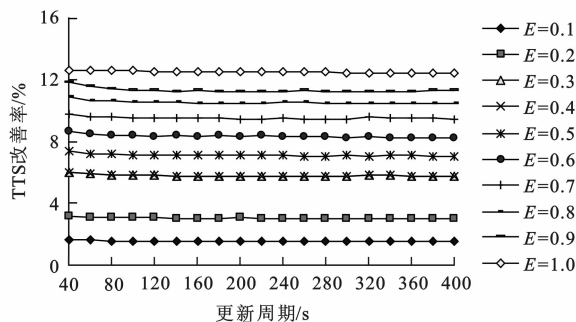
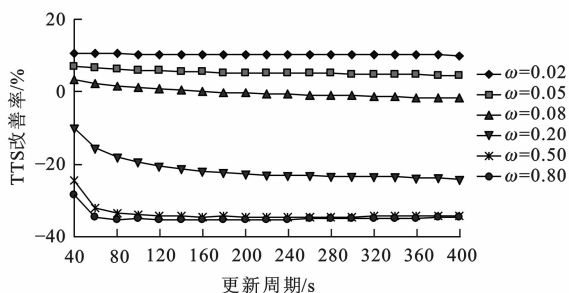
图 6  $\omega$  为 0.30 时的 TTS 改善率曲线Fig. 6 Curves of TTS improvement rates while  $\omega$  is 0.30

对于中型路网,当  $\omega$  为 0.08 时,TTS 改善率曲线见图 7。TTS 改善率随  $C_1$  增大而减小,但随  $E$  增大而增大。当  $E$  为 0.8 时,TTS 改善率曲线见图 8。 $\omega$  越大,TTS 改善率越小,并且  $\omega$  大于某一值后路网运行效率反而下降(TTS 改善率为负),当  $\omega$  为 1.00 时,TTS 改善率为 -11%~-51%。

图 7  $\omega$  为 0.08 时的 TTS 改善率曲线Fig. 7 Curves of TTS improvement rates while  $\omega$  is 0.08图 8  $E$  为 0.8 时的 TTS 改善率曲线Fig. 8 Curves of TTS improvement rates while  $E$  is 0.8

对于大型路网,当  $\omega$  为 0.01 时,TTS 改善率曲线见图 9。TTS 改善率随  $C_1$  和  $E$  变化的规律同小型、中型路网。当  $E$  为 0.9 时,TTS 改善率曲线见图 10。路网运行效率随  $\omega$  增大而下降,并可能出现比不发布 VMS 行程时间信息还差的局面。

中国一些城市的 VMS 行程时间信息关注率可

图 9  $\omega$  为 0.01 时的 TTS 改善率曲线Fig. 9 Curve of TTS improvement rates while  $\omega$  is 0.01图 10  $E$  为 0.9 时的 TTS 改善率曲线Fig. 10 Curves of TTS improvement rates while  $E$  is 0.9

达到 85% 以上<sup>[14]</sup>。由图 5~7、9 可看出,当  $E$  较大时,VMS 行程时间诱导效益很显著。对于小型路网,由图 5 可知,当信息关注率为 70% 时,诱导效益可达到 25% 以上。

通过以上仿真可以看出,提供实时的 VMS 行程时间信息通常能够显著提高路网运行效率,能够缓解需求激增等引起的拥挤; $E$  越大,诱导效益越好; $\omega$  对于诱导效益有显著影响, $\omega$  较大而  $E$  又较小时可能会导致诱导出现负效益。

当评估某一地区 VMS 行程时间诱导效益时,应结合当地路网和驾驶人为进行分析,以便得到更科学的结论。假设 VMS 行程时间信息更新周期为 2 min,信息关注率为 80%,对于小型路网,诱导效益可达到 28.89% 以上(图 5),对于中型路网,诱导效益可达到 15.87% 以上(图 7),对于大型路网,诱导效益可达到 10.53% 以上(图 9)。

### 3 结 语

本文运用基于宏观交通仿真模型的 VMS 行程时间诱导效益分析方法,在 3 种不同规模的路网上进行仿真,研究驾驶人的信息关注率和信息理解偏差系数与 VMS 行程时间诱导效益的关系,分析结果如下。

(1)VMS 行程时间通常能够缓解需求激增等交

通事件引起的拥挤。

(2)信息关注率越高,VMS 行程时间改善路网运行效率的作用越明显。可见,在交通管理中提高信息准确度,引导驾驶人更加关注 VMS 行程时间信息,具有重要意义。

(3)信息理解偏差程度是 VMS 行程时间诱导效益的重要决定因素。信息理解偏差系数越大,诱导效益越小,甚至出现负效益。不同地区的信息理解偏差系数通常不同,下一步将结合 VMS 行程时间信息实例系统加强驾驶人行为研究,以便更科学地评价 VMS 行程时间诱导效益。

### 参 考 文 献 :

#### References :

- [1] RICHARDS A, MCDONALD M. Questionnaire surveys to evaluate user response to variable message signs in an urban network[J]. Intelligent Transport Systems, 2007, 1(3): 177-185.
- [2] ERKE A, SAGBERG F, HAGMAN R. Effects of route guidance variable message signs(VMS) on driver behaviour [J]. Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour, 2007, 10(6): 447-457.
- [3] 千宏程. VMS 诱导信息影响下的路径选择行为分析[J]. 系统工程, 2008, 26(3): 11-16.  
GAN Hong-cheng. Exploring drivers' route choice response to real-time guidance information of variable message signs[J]. Systems Engineering, 2008, 26(3): 11-16. (in Chinese)
- [4] 千宏程,孙立军,陈建阳. 提供交通信息条件下的途中改道行为研究[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2006, 34(11): 1484-1488.  
GAN Hong-cheng, SUN Li-jun, CHEN Jian-yang. Study on traveler behavior under influence of advanced traveler information system[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2006, 34(11): 1484-1488. (in Chinese)
- [5] 魏 赞,范炳全,韩 印,等. 交通诱导信息对路网中车辆行为的影响[J]. 交通运输工程学报, 2009, 9(6): 114-120, 126.  
WEI Yun, FAN Bing-quan, HAN Yin, et al. Impact of traffic guidance information on vehicle behavior in network[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2009, 9(6): 114-120, 126. (in Chinese)
- [6] 吴文祥,黄海军. 平行路径网络中信息对交通行为的影响研究[J]. 管理科学学报, 2003, 6(2): 12-16.  
WU Wen-xiang, HUANG Hai-jun. Study on behavior impacts caused by travel information systems in parallel route[J]. Journal of Management Sciences in China, 2003, 6(2): 12-16. (in Chinese)
- [7] 安 实,李 静,崔建勋. 面向多智能体的出行前信息下通勤者出行行为研究[J]. 中国公路学报, 2009, 22(3): 95-100.  
AN Shi, LI Jing, CUI Jian-xun. Research on commuter's travel behavior faced to multi-agent under pre-trip informa-

- tion[J]. China Journal of Highway and Transport, 2009, 22(3): 95-100. (in Chinese)
- [8] 石小法, 王 炜, 李文权. 交通信息对交通网络的影响研究[J]. 系统工程学报, 2001, 16(3): 167-171.  
SHI Xiao-fa, WANG Wei, LI Wen-quan. Information effects in transportation network[J]. Journal of Systems Engineering, 2001, 16(3): 167-171. (in Chinese)
- [9] MAMMAR S, MESSMER A, JENSEN P, et al. Automatic control of variable message signs in AALBORG[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 1996, 4(3): 131-150.
- [10] 孟 超, 邵春福, 李 玮, 等. VMS 对驾驶人路径选择行为影响的仿真研究[J]. 城市交通, 2009, 7(1): 76-81.  
MENG Chao, SHAO Chun-fu, LI Wei, et al. Impact simulation of VMSs on driver's route selection behaviors[J]. Urban Transport of China, 2009, 7(1): 76-81. (in Chinese)
- [11] 杨晓光, 伍速锋, 云美萍. 日常出行中的交通信息有效性仿真研究[J]. 计算机工程与应用, 2007, 43(4): 12-15.  
YANG Xiao-guang, WU Su-feng, YUN Mei-ping. Validity analysis of traffic information on day-to-day travel by simulating[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(4): 12-15. (in Chinese)
- [12] 杨珍珍, 干宏程. 面向大型社会活动的快速路网控制策略仿真评价方法[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(12): 4473-4475.  
YANG Zhen-zhen, GAN Hong-cheng. Large social event oriented freeway network control strategy simulation evaluation approach[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(12): 4473-4475. (in Chinese)
- [13] 尚华艳, 黄海军, 高自由. 基于元胞传输模型的可变信息标准选址问题研究[J]. 物理学报, 2007, 56(8): 4342-4347.  
SHANG Hua-yan, HUANG Hai-jun, GAO Zi-you. Locating the variable message signs by cell transmission model[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(8): 4342-4347. (in Chinese)
- [14] GAN Hong-cheng, SUN Li-jun, CHEN Jian-yang, et al. Advanced traveler information system for metropolitan expressways in Shanghai, China[J]. Transportation Research Record, 2006(1944): 35-40.
- [15] GAN Hong-cheng. Graphical route information panel for the urban freeway network in Shanghai, China[J]. Intelligent Transport Systems, 2010, 4(3): 212-220.
- [16] KOTSIALOS A, PAPAGEORGIOU M, MANGEAS M, et al. Coordinated and integrated control of motorway networks via non-linear optimal control[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2002, 10(1): 65-84.

(上接第 120 页)

- tems[J]. Proceedings of the IEEE, 2000, 88(7): 949-970.
- [18] INGALLS B. Conflict resolution in air traffic management using the methods of optimal control theory[D]. Halifax: Dalhousie University, 1997.
- [19] KUCHAR J K, YANG L C. A review of conflict detection and resolution modeling methods[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2000, 1(4): 179-189.
- [20] PALLOTTINO L, FERON E M, BICCHI A. Conflict resolution problems for air traffic management systems solved with mixed integer programming[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2002, 3(1): 3-11.
- [21] NIEDRINGHAUS W P. Maneuver option manager: automated simplification of complex air traffic control problems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1992, 22(5): 1047-1057.
- [22] ALLIOT J M, DURAND N, GRANGER G. Faces: a free flight autonomous and coordinated embarked solver(1998)[J]. Air Traffic Control Quarterly, 2000, 8(6): 109-130.
- [23] 何晓菊, 廖志武. 基于动态调速的定航线飞行冲突探测与解脱[J]. 计算机应用, 2010, 30(2): 540-542.  
HE Xiao-ju, LIAO Zhi-wu. Airline flying conflict survey and extrication based on dynamic velocity modulation[J]. Journal of Computer Applications, 2010, 30(2): 540-542. (in Chinese)
- [24] 夏怡凡, 朱允民, 马 洪, 等. 空中交通冲突调速最优解决方案[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2006, 43(5): 955-961.  
XIA Yi-fan, ZHU Yun-min, MA Hong, et al. An optimal conflict resolution by adjusting the velocity in air traffic[J]. Journal of Sichuan University: Natural Science Edition, 2006, 43(5): 955-961. (in Chinese)
- [25] MENON R K, SWERIDUK G D, SRKDHAR B. Optimal strategies for free-flight air traffic conflict resolution[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1999, 22(2): 202-211.
- [26] DURAND N, ALLIOT J N, CHANSOU O. Optimal resolution of en-route conflicts[J]. Air Traffic Control Quarterly, 1995, 3(3): 139-161.